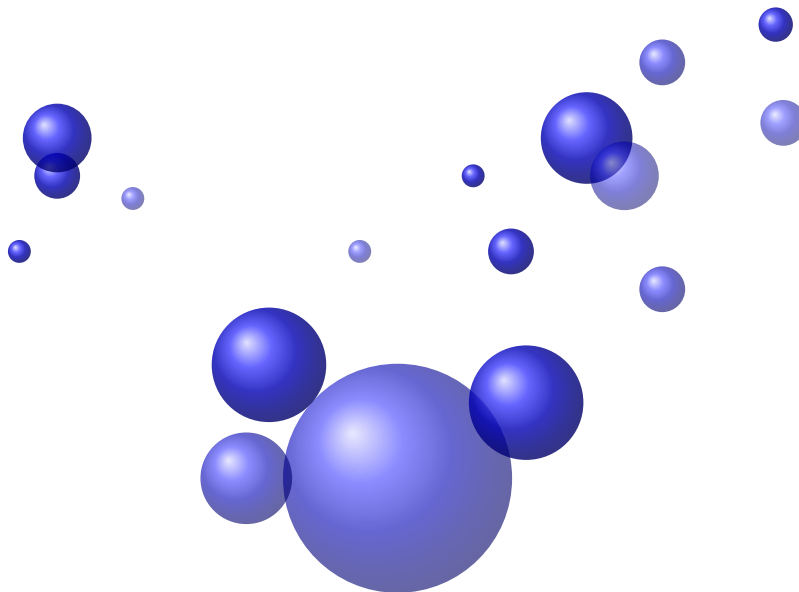


# Techniques calculatoires

Nous vous invitons à compléter les points de cours, à faire les exercices types, si vous les réussissez du premier coup, c'est que vous êtes au point sinon peut-être cliquer sur le lien pour vous entraîner et persévérer.

Nous vous assurons qu'une grande partie de votre réussite dans les matières scientifiques repose sur vos capacités à mener un calcul juste jusqu'au bout. Nous vous encourageons à faire un peu chaque jour. 10 jours pour être bien préparer !

Le document est à nous retourner compléter le jour de la rentrée. Apporter vos recherches écrites des "exercices à maîtriser" pour le mardi.



## Sommaire :

- Entraînement chaque jour 2 - 11
- Formules à apprendre par cœur 12 - 13
- Exemple de devoir de rentrée 14 - 22
- Calculs corrigés en SI 23

# Entrainement Jour 1

## Rappel sur les fractions :

Soient  $p, q, m, n \in \mathbf{Z}$  alors

$$q \neq 0, n \neq 0, \quad \frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \text{-----}$$

$$q \neq 0, n \neq 0, m \neq 0, \quad \frac{\frac{p}{q}}{\frac{m}{n}} = \text{-----}$$

## Rappel sur les identités remarquables :

Soient  $a, b \in \mathbf{R}$ ,

$$(a + b)^2 = \quad , \quad (a - b)^2 = \quad , \quad (a - b)(a + b) =$$

## Rappel sur la fonction racine carrée :

Soient  $a, b \in \mathbf{R}^+$ ,

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \quad , \quad b \neq 0, \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \quad , \quad (\sqrt{a})^2 =$$

## Exercices types

1. Simplifier

$$E = \left( \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}} + \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}} \right)^2$$

2. Mettre

$$\frac{\frac{12,5 \cdot d \cdot 20 \cdot 10^{-2}}{(1+0,0625 \cdot p) \cdot p}}{1 + \frac{12,5 \cdot d \cdot 20 \cdot 10^{-2}}{(1+0,0625 \cdot p) \cdot p}}$$

sous la forme  $\frac{1}{1+Ap+Bp^2}$ , préciser  $A$  et  $B$ .

3. Mettre

$$\frac{\frac{K_c \cdot D \cdot 0,064 \cdot 0,7}{p(1+0,03p)}}{1 + \frac{C \cdot D \cdot 0,064 \cdot 0,7}{p(1+0,03p)}}$$

sous la forme  $\frac{1}{1+Ap+Bp^2}$ , préciser  $A$  et  $B$ .

4. Faites les applications numériques suivantes, en ordre de grandeur, sans calculatrice :

$$\frac{2\pi}{180} \frac{1}{50} \quad \frac{15 \times 14}{75 \times 35} \quad \frac{360}{2000}$$

## Pour s'entraîner

Fractions  
Racines carrées

# Entrainement Jour 2

## Calcul de puissance

- Pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $x^n = x.x \dots x$  ( $n$  fois)
- Pour tout  $x \neq 0$ ,  $x^{-1} = \frac{1}{x}$  et pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $x^n = x.x \dots x$  ( $n$  fois)
- Pour tout  $x \neq 0$ , pour tout  $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$ ,  $(x^m)^n = (x^n)^m = x^{mn}$
- Pour tout  $x, y \neq 0$ , pour tout  $m \in \mathbf{Z}$ ,  $(xy)^m = x^m y^m$
- Pour tout  $x \neq 0$ , pour tout  $m, p \in \mathbf{Z}$ ,  $x^m x^p = x^{m+p}$  et  $\frac{x^m}{x^p} = x^{m-p}$
- Pour tout  $m \in \mathbf{Z}$ ,  $(-1)^{2m} = 1$  et  $(-1)^{2m+1} = -1$ .

## Exercices types

1. Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme  $a^n$  avec  $a$  et  $n$  deux entiers relatifs :

$$\frac{6^5}{2^5}, (10^5)^3, \frac{(10^3)^{-5}10^5}{10^3 10^{-5}}$$

2. Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme  $2^n 3^p$  avec  $p$  et  $n$  deux entiers relatifs :

$$2^{21} + 2^{22}, \frac{(3^2 \cdot (-2)^4)^8}{((-3)^5 2^3)^{-2}}$$

3. Simplifier et exprimer en fonction de  $y \in \mathbf{R}^*$  :

$$\frac{(y^2)^{-3}((-y)^2)^{-1}}{(-y)^7(-y^2)^{-5}} =$$

4. Soit  $m \in \mathbf{Z}$ , déterminer  $l \in \mathbf{Z}$  en fonction de  $m$  tel que :

$$E = \frac{4^m}{8^{2m-1} 2^{-3m}} = 2^l$$

5. Simplifier  $(a^{2^n} - b^{2^n})(a^{2^n} + b^{2^n})$  pour tout  $(a, b, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{N}^*$ . Attention ... bien lire ...  $2^n$  et non  $2n$ .

6. Simplifier au maximum l'expression en fonction du réel  $x$  :

$$\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x}$$

7. Simplifier au maximum l'expression en fonction du réel  $x$  :

$$\frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x}$$

## Pour s'entraîner

Fonction carré  
Puissances  
Calcul littéral

# Entrainement Jour 3

## Calculs avec la fonction exponentielle :

— Pour tout  $x, y \in \mathbf{R}$ ,

$$e^x e^y = \dots \qquad \frac{1}{e^x} = \dots \qquad \frac{e^x}{e^y} = \dots$$

— Pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , pour tout  $m \in \mathbf{Z}$ ,  $(e^x)^m = e^{xm}$ .

## Exercices types

1. Démontrer que pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

2. Soit  $x, y \in \mathbf{R}$ , montrer qu'il existe  $a, b \in \mathbf{R}$  telle que :

$$Q = \frac{e^{3x} + e^{y-x}}{e^{x+y} + e^{2y-3x}} = \frac{e^x(e^{\dots} + e^{\dots})}{e^{y-x}(e^{\dots} + e^{\dots})} = e^{ax} e^{by}$$

3. Résoudre dans  $\mathbf{R}$ , l'inéquation suivante en posant  $T = e^x$  :

$$e^{2x} + 2e^x - 3 \leq 0$$

4. Résoudre l'inéquation d'inconnue  $x \in \mathbf{R}$  :  $e^{-6x} \leq \sqrt{e}$

## Pour s'entraîner

**Propriétés de la fonction exponentielle**  
**Fonction exponentielle**

# Entrainement Jour 4

## Calculs avec la fonction logarithme :

— Pour tout  $x, y > 0, n \in \mathbf{N}$

$$\ln(xy) = \dots$$

$$\ln(x) - \ln(y) = \dots$$

$$\ln(x^n) = \dots$$

— Pour tout  $x > 0, \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ .

— Pour tout  $x, y > 0,$

$$\log(xy) = \dots$$

$$\log\left(\frac{1}{x}\right) = \dots$$

$$\log(x^n) = \dots$$

— Pour tout  $x > 0, e^{\ln(x)} = x$  et pour tout  $x \in \mathbf{R}, \ln(e^x) = x$ .

## Exercices types

1. Exprimer en fonction de  $\ln(x)$  et  $\ln(y)$  la quantité suivante :

$$S = \frac{\ln(y^2 e^{\ln(x)})}{2 + \ln\left(\frac{x}{e^2}\right)}$$

2. On considère l'expression :

$$E = E^0 + \frac{0.06}{2} \log\left(\frac{[H^+]^3 [B]^4}{[A]^4}\right)$$

Montrer qu'il existe  $(a, b) \in \mathbf{R}$  telles que :

$$E = E^0 + a \text{pH} + b \log\left(\frac{[A]}{[B]}\right)$$

où  $\text{pH} = -\log([H^+])$

3. Simplifier :

$$e^{3 \ln(2)} = \dots \quad e^{-\ln(3)} = \dots \quad e^{-2 \ln(4)} = \dots$$

4. Simplifier :

$$\ln(\sqrt{\exp(-\ln(e^2))}) = \dots \quad e^{-\ln(\ln(2))} = \dots \quad e^{-\frac{1}{3} \ln(e^{-3})} = \dots$$

## Pour s'entraîner

**Fonction logarithme**  
**Fonction ln**

# Entrainement Jour 5

## Calculs de dérivées :

— Soit  $u$  une **fonction dérivable** ,

$$(e^u)' = \dots \quad (u^n)' = \dots \quad (\sqrt{u})' = \dots \quad (\ln(u))' = \dots$$

— Soient  $u$  et  $v$  deux **fonctions dérivables**,

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \quad (uv)' = \quad \left(\frac{u}{v}\right)' =$$

$$(\cos(u))' = \dots \quad (\sin(u))' = \dots$$

— Écrire les résultats précédents avec la notation en physique :  $u' = \frac{du}{dt}$

— Soient  $u$  et  $v$  deux **fonctions dérivables**,

$$\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{dt} = \quad \frac{d(uv)}{dt} = \quad \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dt} =$$

$$\frac{d(\cos(u))}{dt} = \quad \frac{d(\sin(u))}{dt} =$$

## Exercices types

1. Soit  $a$  un réel,

$$u : t \mapsto \cos(at) \text{ alors } \frac{du}{dt}(t) =$$

$$v : t \mapsto \sin(at) \text{ alors } \frac{dv}{dt}(t) =$$

$$w : t \mapsto \exp(at) \text{ alors } \frac{dw}{dt}(t) =$$

$$r : t \mapsto \ln(at) \text{ alors } \frac{dr}{dt}(t) =$$

2. Soit  $u$  une fonction,

$$\text{Exprimer } \left(\frac{du^2}{dt}\right)(t) = \quad \text{en fonction de } u(t) \text{ et } \frac{du}{dt}(t).$$

$$\text{Exprimer } \left(\frac{d\frac{1}{u}}{dt}\right)(t) = \quad \text{en fonction de } u(t) \text{ et } \frac{du}{dt}(t).$$

3. Calculer la dérivée des fonctions suivantes par rapport à la variable de la fonction :

(a)  $[A](t) = [A]_0 e^{-kt}$  avec  $[A]_0, k$  deux constantes. Calculer  $\frac{d[A]}{dt}$ .

(b)  $u(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(w_0 t)$  avec  $U_0, \tau, w_0$  des constantes. Calculer  $\frac{du}{dt}$ .

(c)  $y(\theta) = \frac{\lambda}{1 - \mu_0 \theta}$  avec  $\lambda, \mu_0$  deux constantes. Calculer  $\frac{dy}{d\theta}$ .

4. Étudier les variations de la fonction  $f_\beta : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)^\beta}$  sur  $[e^{-\beta}; +\infty[$  avec  $\beta < 0$ .

5. Déterminer l'expression de  $f'(x)$  pour  $f$  définie par :

$$f(x) = \ln(\ln(x)) \quad , \quad f(x) = (\sin(x) + 2 \cos(x))^2 \quad , \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x + 2 \ln(x)}$$

## Pour s'entraîner

### Dérivation

# Entrainement Jour 6

## Problème de conversion :

On se demande pourquoi on introduit toutes ces unités différentes ? Pour piéger les étudiants ? Non ! Pour manipuler des valeurs avec le moins de puissance de 10.

## Exercices types

1. En atomistique le classique est le passage Joule/électron-volt pour l'énergie et nanomètre/mètre pour la longueur d'onde.

**Exemple :** l'énergie du photon est donnée par la relation  $E = \frac{hc}{\lambda}$  avec :

$h$  : constante de Planck =  $6,62 \cdot 10^{-34} J \cdot s$

$c$  : célérité de la lumière  $c = 3 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1}$

$\lambda$  : longueur d'onde en  $m$ .

- (a) Quelle est l'unité de l'énergie du photon ?  
(b) Pour une transition de  $600nm$  que vaut l'énergie du photon émis en joule et en  $eV$  sachant que  $1eV = 1,6 \cdot 10^{-19} J$ .

2. En cristallographie le classique est le calcul de la masse volumique en  $kg \cdot m^{-3}$  ou  $g \cdot cm^{-3}$  à partir de rayons donnés en picomètres.

**Exemple :** la masse volumique d'un cristal de cuivre est  $\rho = \frac{4M}{N_a a^3}$  avec :

$M$  : masse molaire du cuivre =  $63,5g/mol$

$N_a$  : nombre d'Avogadro =  $6,02 \cdot 10^{23} mol^{-1}$

$a$  : paramètre de la maille  $a = 361pm$

- (a) Que vaut un picomètre en mètre ? en centimètre ?  
(b) Calculer la masse volumique du cuivre en  $kg \cdot m^{-3}$  et en  $g \cdot cm^{-3}$

3. En solutions aqueuses le classique est le calcul de la capacité d'une pile/durée de vie.

**Exemple :** la capacité de la pile Daniell est donnée par  $Q = I \cdot \Delta t = 2 \cdot F \cdot \epsilon$  en Coulomb (C) avec :

$I$  : intensité en  $A$

$\Delta t$  : durée de la pile en  $s$

$F$  : constante de Faraday =  $96500 C \cdot mol^{-1}$

$\epsilon$  : avancement de la réaction en  $mol$

- (a) Quelle est la capacité d'une pile dont l'avancement est de  $10 mmol$  ?  
(b) Pour une intensité de  $100 mA$  quelle est sa durée de vie en  $s$  et en  $h$  ?

4. Comment convertir  $2500 t/min$  ( $tour/min$ ) en  $rad/s$  ?

Exprimons les relations entre ces unités :  $1 tour = 2\pi rad$  et  $1 min = 60 sec$ .

On obtient alors :  $2500 t/min = 2500 \frac{tour}{min} = 2500 \frac{2\pi rad}{60 sec} = 262 \frac{rad}{sec}$ .

Il est souvent plus judicieux d'exprimer les unités avec des exposants plutôt que des fractions.

On gagnera à écrire  $262 rad \cdot s^{-1}$ .

5. Convertir :

(a) convertir  $110 km \cdot h^{-1}$  en  $m \cdot s^{-1}$ .

(b) Convertir  $1/Ke = 274 Rpm/v$  en  $rad \cdot s^{-1} \cdot v^{-1}$ . On précise  $Rpm$  : Rotation par minute. Exprimer ensuite  $Ke$  en  $v \cdot s \cdot rad^{-1}$ .

# Entrainement Jour 7

## Fonctions composées :

— Soit  $h_1$  et  $h_2$  deux fonctions, on appelle composition de  $h_1$  suivi par  $h_2$  que l'on note  $h_2 \circ h_1$  (on lit  $h_2$  rond  $h_1$ ) la fonction définie par :

$$h_2 \circ h_1(t) = h_2(h_1(t))$$

— Soit  $h_1$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et  $h_2$  une fonction dérivable sur un intervalle  $J$  avec  $h_1(I) \subset J$  alors  $h_2 \circ h_1$  est dérivable sur  $I$  et

$$(h_2 \circ h_1)' = h_1' \cdot h_2' \circ h_1$$

## Exercices types

1. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions, déterminer  $f \circ g$  et  $g \circ f$  :

(a)  $f : t \mapsto \exp(t)$  et  $g : t \mapsto \lambda t$  alors  
 $f \circ g(t) =$  et  $g \circ f(t) =$  .

(b)  $u : t \mapsto \ln(t)$  et  $v : t \mapsto 2 - t$  alors  
 $u \circ v(t) =$  et  $v \circ u(t) =$  .

2. Déterminer l'expression de  $f'(x)$  pour  $f$  définie par :

(a)  $x \in ]0; \pi[$ ,  $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$

(b)  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $f(x) = \sin(\sqrt{x})$

3. Déterminer l'expression de  $f'(x)$  pour  $f$  définie par :

(a)  $x \in \mathbf{R}^*$ ,  $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(b)  $x \in ]0; \pi[$ ,  $f(x) = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$

4.  $E : t \mapsto E_0 + \frac{RT}{nF} \ln(c_0 - x(t))$  où  $x$  est la fonction d'avancement volumique et  $E_0, R, T, n, F, c_0$  sont des constantes.

Calculer  $\frac{dE}{dt}$  en fonction de  $x$  et  $\frac{dx}{dt}$ .

## Pour s'entraîner

### Dérivation

# Entrainement Jour 8

## Géométrie et trigonométrie :

— On considère le cercle trigonométrique et un point de ce cercle. Le radian est une unité de mesure des angles de façon que l'angle plat 180 mesure  $\pi$ .

Ainsi un arc de cercle de rayon  $R$  et d'angle  $\alpha$  (radian) a pour longueur  $L = \alpha R$ .

— Compléter sous forme d'un tableau la correspondance entre les angles en degré et en radian

Angle en radian	$\pi$	0	$2\pi$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Angle en degré						

— Soit un angle  $\alpha$  repéré par un point  $M$  sur le cercle trigonométrique. On appelle :

-  $\cos(\alpha) = \overline{OH}$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe des abscisses.

-  $\sin(\alpha) = \overline{OK}$  où  $K$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe des ordonnées.

— Tableaux angles remarquables ♡♡

Angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$				
sin	0	$\frac{1}{2}$				

— Formules d'addition ♡♡.

$$\cos(a + b) =$$

$$\text{et } \cos(a - b) =$$

$$\sin(a + b) =$$

$$\text{et } \sin(a - b) =$$

## Exercices types

- Calculer les valeurs exactes des expressions suivantes :  $\cos(\frac{538\pi}{3})$ ,  $\sin(\frac{123\pi}{6})$ ,  $\cos(\frac{-77\pi}{4})$
- Sachant que  $\cos(x) = -\frac{4}{5}$ , calculer  $\cos(x - \pi)$ ,  $\sin(-x - \pi)$ ,  $\cos(\frac{\pi}{2} + x)$ ,  $\sin(\frac{\pi}{4} - x)$ .
- L'un des rayons d'un faisceau de lumière, se propageant dans l'air, et arrivant sur une surface plane de verre. Données : indice de réfraction du verre  $n_{\text{verre}} = 1,52$ .
  - Schématiser la situation illustrant le phénomène de réfraction.
  - Écrire la deuxième loi de DESCARTES.
  - En déduire la valeur de l'angle d'incidence permettant d'obtenir un angle de réfraction de 20 degré.
- Lorsqu'un système se déplace d'un point  $A$  à un point  $B$ , le travail  $W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB} = F \times AB \times \cos(\theta)$ .  
 $W$  le travail (en  $J$ )  $F$  la norme de la force constante (en  $N$ )  $AB$  la longueur du segment  $[AB]$  (en  $m$ )  
 $\theta = (\vec{F}, \vec{AB})$  (en degré ou rad)  
 Un morceau de savon de masse  $m = 220g$  glisse sans frottement sur un plan incliné d'un angle de 30 degré par rapport à l'horizontale. Donnée :  $g = 9.8N.kg^{-1}$ 
  - Quelles sont les forces exercées sur le morceau de savon ?
  - Calculer le travail de ces forces pour un déplacement égal à  $L = 1.0m$ .
  - Calculer la puissance moyenne du travail du poids si la durée de trajet est égale à  $\Delta t = 1,5s$ .

## Pour s'entraîner

Cours de trigo  
Exercice de trigo

# Entrainement Jour 9

## Comment résoudre une inéquation ou montrer une inégalité ?

- on identifie l'inconnue ou la variable et éventuellement les paramètres
- on donne le domaine d'existence de l'équation (critères)
- on ajoute ou soustrait un même nombre de part et d'autre du symbole d'inégalité
- on multiplie ou on divise par un nombre NON NUL et DONT ON CONNAIT LE SIGNE de part et d'autre du symbole d'égalité. SI le nombre est NÉGATIF il faut changer le sens des inégalités.
- on peut aussi essayer de factoriser pour se ramener à un produit nul ou d'étudier une fonction ou de raisonner par équivalence.
- le but étant d'exprimer l'inconnue en fonction des paramètres en traitant des cas SI NÉCESSAIRE.

## Comment étudier le signe d'une fonction ?

- on identifie l'inconnue ou la variable et éventuellement les paramètres
- on donne le domaine d'existence de la fonction (critères)
- on peut effectuer **un tableau de signe**
- on peut étudier les variations de la fonction et trouver les valeurs où elle s'annule

## Exercices types

1. Résoudre **graphiquement** puis numériquement  $X^2 \leq 16$  à l'aide du graphe de la fonction  $t \mapsto t^2$  (que vous représenterez).
2. Résoudre **graphiquement** puis numériquement  $X^2 > 25$  à l'aide du graphe de la fonction  $t \mapsto t^2$  (que vous représenterez).
3. Résoudre à l'aide de la question précédente l'inéquation d'inconnue  $x \in \mathbf{D}$  (à préciser),

$$\left(\frac{3x+1}{6x-3}\right)^2 \leq 16$$

*Indication : Rappeler les opérations autorisées dans les inégalités et les conditions de ces opérations. Pensez aux signes des termes manipulés. Vous réaliserez des tableaux de signes (révisions).*

4. Résoudre :

$$-1 < \frac{2x}{1+x^2} < 1$$

5. Trouver le domaine de définition de  $x \mapsto \ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)$  à l'aide d'un **tableau de signe**.

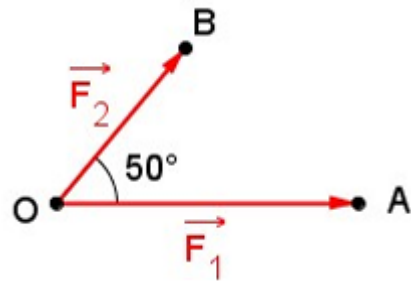
# Entrainement Jour 10

## Vecteurs et produit scalaire :

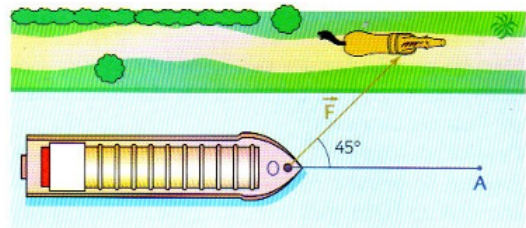
- Le cours sur les vecteurs est traité en classe de seconde ainsi que le cours sur les droites.  
**Équation de droite**  
**Les vecteurs**
- Le cours sur le produit scalaire est traité en classe de première avec des vecteurs de  $\mathbf{R}^2$ .  
**Produit scalaire**
- Le cours sur le produit scalaire est traité en classe de terminal avec des vecteurs de  $\mathbf{R}^3$ .  
**Produit scalaire dans l'espace**
- Le cours de géométrie dans l'espace est traité en classe de terminal.  
**Géométrie vectorielle**

## Exercices types

1. Un point  $O$  est soumis à deux forces et qui forme un angle de 50 degré. Les intensités des deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  sont respectivement 300 N et 200 N. Par définition, la résultante des force est le vecteur  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ . Calculer l'intensité de la résultante, à un newton près.



2. Pour tirer sur 50 m de  $O$  en  $A$  une péniche légère, un cheval, placé sur le chemin de halage exerce une force  $\vec{F}$  d'intensité de 2000 newtons. Cette force fait un angle de 45 avec la direction du déplacement.  
Quel est le travail  $W$  de la force ?

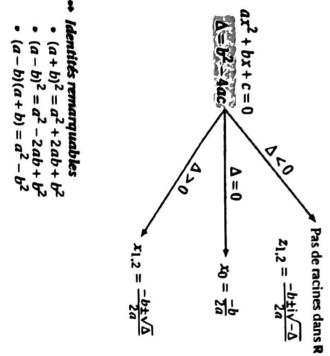


## Pour s'entraîner

Produit scalaire  
Géométrie dans l'espace  
Géométrie dans l'espace

# A apprendre par cœur

## Polynômes du 2<sup>nd</sup> degré



### Identités remarquables

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

### Proportionnalité (produit en croix)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \times d = c \times b$$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	signe de $a$	

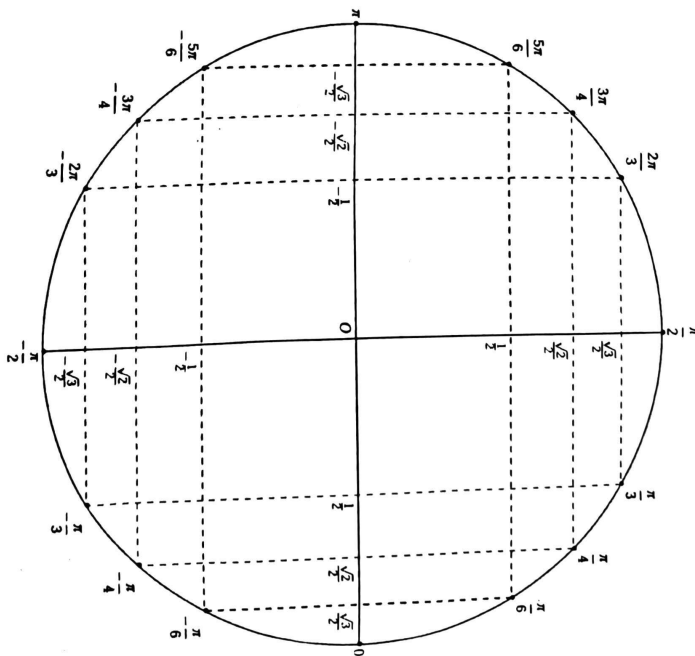
$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$
$P(x)$	signe de $a$		0
	signe de $a$		signe de $a$

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
$P(x)$	signe de $a$		0	signe de $a$
	signe de $a$		0	signe de $a$

Nature	ARITHMÉTIQUE	GÉOMÉTRIQUE
$u_{n+1} = f(u_n)$	$\begin{cases} u_p \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$	$\begin{cases} q^p \\ u_{n+1} = q \times u_n \end{cases}$
$u_n = f(n)$	$\begin{aligned} u_n &= u_0 + nr \\ &= u_1 + (n-1)r \\ &= u_2 + (n-2)r \\ &= \dots \end{aligned}$	$\begin{aligned} u_n &= u_0 \times q^n \\ &= u_1 \times q^{n-1} \\ &= u_2 \times q^{n-2} \\ &= \dots \end{aligned}$
Somme de $u_p$ à $u_n$	$\frac{(n-p+1) \times \text{premier} + \text{dernier}}{2}$	premier $\times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$
Pour démontrer	$u_{n+1} - u_n = \dots = r$	$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \dots = q$ $\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}} = \dots = q^{n+1}$

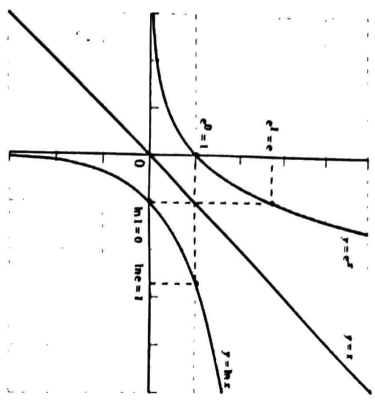
## Cercle trigonométrique et valeurs remarquables



### Formules de trigonométrie

$$\begin{aligned} \cos^2 a + \sin^2 a &= 1 \\ \cos^2 a - \sin^2 a &= \cos 2a \\ \sin 2a &= 2 \sin a \cos a \\ \cos 2a &= 2 \cos^2 a - 1 \\ \cos 2a &= 1 - 2 \sin^2 a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \tan a &= \frac{\sin a}{\cos a} \end{aligned}$$



Limites du type:  $\Delta$  Prier la règle des signes

$k \neq 0$	$0^k$	$k \neq 0$	$1^k$	$1^{\infty}$	$1^{\infty}$	$1^{\infty}$	$1^{\infty}$
$1^{\infty}$	$0^{\infty}$	$0^{\infty}$	$1^{\infty}$	$1^{\infty}$	$1^{\infty}$	$1^{\infty}$	$1^{\infty}$

Forme indéterminée (F):

$\infty$	$0$	$0 \times \infty$	$(+\infty) + (-\infty)$	$(-\infty) + (+\infty)$
$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{\infty}$	$\frac{+\infty}{+\infty}$	$\frac{-\infty}{-\infty}$

En présence d'une F, on peut développer, factoriser, utiliser les "croissances comparées".

Croissances comparées:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n e^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

Propriétés du logarithme Népérien et de l'exponentielle:

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$e^{a+b} = e^a \times e^b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$e^{-a-b} = \frac{1}{e^a e^b}$

$\ln a^n = n \ln a$

$(e^a)^n = e^{an}$

$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

$\ln \frac{1}{b} = -\ln b$

$\ln e^x = x$

$e^{\ln x} = x$

Interprétation graphique des limites:

$\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = \ell \implies \mathcal{C}_f$  admet en  $\ell$  une asymptote horizontale d'équation  $y = \ell$ .

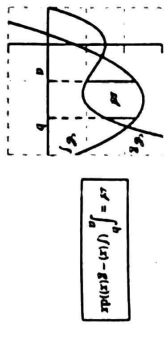
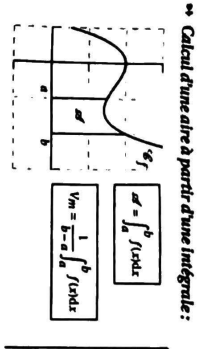
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty \implies \mathcal{C}_f$  admet une asymptote verticale d'équation  $x = a$ .

Etude de position:

Pour étudier la position de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à  $\mathcal{C}_g$ , on étudie le signe de  $f(x) - g(x)$ .

Equation de la tangente en a:

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$



Tableaux des dérivées et des primitives

Fonction f	Dérivée f'
$x^n$	$n x^{n-1}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$e^x$	$e^x$
$ku$	$ku'$
$u^n$	$n u^{n-1} u'$
$uv$	$u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$e^u$	$u' e^u$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$

Fonction f	Primitive F
$x^n$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$
$\frac{1}{x^n}, n \neq 1$	$-\frac{1}{n-1} x^{-n+1}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$
$e^{ax+b}$	$\frac{1}{a} e^{ax+b}$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a} \ln(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b)$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax+b)$
$u^n$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$
$u^n, n \neq -1$	$-\frac{1}{n-1} u^{n-1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u' e^u$	$e^u$
$u' \cos u$	$\sin u$
$u' \sin u$	$-\cos u$

## **2 Exemples de tests de rentrée avec leur corrigé**

## Test 1 de calculs.

Calculatrice interdite.

Durée 1h, mardi de la rentrée, PCSI

### 1. Le cours .

- (a) Rappeler le graphe de la fonction exponentielle.
- (b) Rappeler  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$
- (c) Rappeler la formule :  $\forall a, b \in \mathbf{R}, (a + b)^2 =$
- (d) Rappeler la formule :  $\forall a, b \in \mathbf{R}, \cos(a - b) =$ .
- (e) Rappeler la formule  $\forall x, y > 0, \ln\left(\frac{x}{y}\right) =$ .
- (f) Rappeler la formule de dérivation :  $\left(\frac{u}{v}\right)' =$

### 2. Les fractions.

- (a) Simplifier la fraction suivante :  $k \in \mathbf{Z}, \frac{3^{3k-1}}{9^{-k+1}} =$
- (b) Écrire le nombre suivant sous forme d'une fraction irréductible :  
 $(2 \times 3 \times 5)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) =$
- (c) Écrire le nombre suivant sous forme d'une fraction irréductible :  
 $\frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{9}}{\frac{1}{16} - \frac{3}{4}} =$
- (d) Mettre sous forme d'une seule fraction, qu'on écrive sous la forme la plus simple possible :  
 $(a, b) \in \mathbf{Z}^2, \text{ distincts}, \frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b} =$

### 3. Puissances.

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme  $2^n 3^p$  où  $n$  et  $p$  sont des entiers relatifs.

- (a)  $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}} =$
- (b)  $\frac{(3^2 \times (-2)^4)^8}{((-3)^{-2} \times 2^3)^{-5}} =$

### 4. Racines carrées .

Simplifier les expressions suivantes en prenant soin de ne pas se tromper sur les signes si besoin :

- (a)  $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} =$
- (b)  $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2} =$
- (c)  $\frac{\sqrt{\frac{27}{5}}}{\sqrt{\frac{9}{25}}} =$

### 5. Transformation d'écriture.

Écrire aussi simplement que possible :

- (a)  $x \in \mathbf{R}, (2 - 3x)^2 - (2 + 3x)^2 =$
- (b)  $x \in \mathbf{R}, (-1 + 3x^2)^2 =$
- (c)  $(3 - \sqrt{7})^2 - (3 + \sqrt{7})^2 =$
- (d)  $\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 =$

(e)  $\frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} =$

6. **Recherche des racines.**

Résoudre mentalement les équations suivantes et factoriser le polynôme :

Les racines sont à chercher parmi  $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$

(a)  $x^2 - 6x + 9 = 0$

(b)  $2x^2 - 3x = 0$

7. **Trigonométrie.**

(a) Calculer, pour chaque nombre réel  $x$  donné,  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$ .

i.  $x = \frac{5\pi}{6}$

ii.  $x = \frac{-27\pi}{4}$

(b) Soit  $x$  un réel tel que les expressions suivantes sont bien définies. Simplifier ces expressions en précisant à chaque fois la formule utilisée :

i.  $A = \sin(x + \pi) - \cos(x - \frac{\pi}{2})$

ii.  $B = \cos(x) - \cos(x - \frac{\pi}{3}) - \cos(x + \frac{\pi}{3})$

(c) Résoudre les équations suivantes ( attention, il y a une infinité de solutions ) :

i.  $\sin(x) = -1$

ii.  $\cos(x) = 0$

8. **Formules exponentielle et logarithme.** Simplifier les expressions suivantes :

(a)  $\ln(\frac{2x+1}{x+3}) - \ln(\frac{4x+2}{x^2-9})$

(b)  $\frac{e^{\ln(x^2)} - e^{-\ln(x)}}{e^{2\ln(x)+1}}$

(c)  $\frac{e^{3x+2}e^{-2x}}{e^{9x+6}e^{-16x}}$

9. **Dérivation.**

Dériver les fonctions suivantes en précisant à chaque fois la formule utilisée :

(a)  $f_1 : x \mapsto 8x^7 + \frac{3}{x^2}$  donc  $f'_1 : x \mapsto$

(b)  $f_2 : x \mapsto \ln(3x+1)(1-3x)^2$  donc  $f'_2 : x \mapsto$

(c)  $f_3 : x \mapsto \sqrt{2x^2 - 4x}$  donc  $f'_3 : x \mapsto$

10. **Calculs de primitives.**

Déterminer les primitives des fonctions suivantes en rappelant à chaque fois la formule utilisée.

(a)  $f_1 : x \mapsto 8x^7 + \frac{3}{x^2}$  donc  $F_1 : x \mapsto$

(b)  $f_2 : x \mapsto xe^{-x^2}$  donc  $F_2 : x \mapsto$

(c)  $f_3 : x \mapsto \frac{2x}{1-3x^2}$  donc  $F_3 : x \mapsto$

# Correction test 1 de calculs.

Durée 1h, PCSI

## 1. Le cours.

- (a) Rappeler le graphe de la fonction exponentielle.
- (b) Rappeler  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$
- (c) Rappeler la formule :  $\forall a, b \in \mathbf{R}, (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- (d) Rappeler la formule :  $\forall a, b \in \mathbf{R}, \cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ .
- (e) Rappeler la formule  $\forall x, y > 0, \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ .
- (f) Rappeler la formule de dérivation :  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

## 2. Les fractions.

- (a) Simplifier la fraction suivante :  $k \in \mathbf{Z}, \frac{3^{3k-1}}{9^{-k+1}} = 3^{5k-5}$
- (b) Écrire le nombre suivant sous forme d'une fraction irréductible :  
 $(2 \times 3 \times 5)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = 15 + 10 + 6 = 31$
- (c) Écrire le nombre suivant sous forme d'une fraction irréductible :  
 $\frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{9}}{\frac{1}{16} - \frac{3}{4}} = -\frac{16}{99}$
- (d) Mettre sous forme d'une seule fraction, qu'on écrive sous la forme la plus simple possible :  
 $(a, b) \in \mathbf{Z}^2, \text{ distincts}, \frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b} = \frac{2a^2b + ab^2 - a^2b - 2ab^2}{(a-b)^2}$

## 3. Puissances.

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme  $2^n 3^p$  où  $n$  et  $p$  sont des entiers relatifs.

- (a)  $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}} = \frac{3^{21}(3+1)}{3^{21}(3-1)} = 2$
- (b)  $\frac{(3^2 \times (-2)^4)^8}{((-3)^{-2} \times 2^3)^{-5}} = \frac{3^{16} 2^{32}}{3^{10} 2^{-15}} = 3^6 2^{47}$

## 4. Racines carrées.

Simplifier les expressions suivantes en prenant soin de ne pas se tromper sur les signes si besoin :

- (a)  $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{3} - 1$
- (b)  $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2} = \sqrt{7} - 2$
- (c)  $\frac{\sqrt{\frac{27}{5}}}{\sqrt{\frac{9}{25}}} = \sqrt{15}$

## 5. Transformation d'écriture.

Écrire aussi simplement que possible :

- (a)  $x \in \mathbf{R}, (2 - 3x)^2 - (2 + 3x)^2 = -24x$
- (b)  $x \in \mathbf{R}, (-1 + 3x^2)^2 = 1 - 6x^2 + 9x^4$
- (c)  $(3 - \sqrt{7})^2 - (3 + \sqrt{7})^2 = -12\sqrt{7}$
- (d)  $\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{27 - 10\sqrt{2}}{3}$

$$(e) \frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$$

6. **Recherche des racines.**

Résoudre mentalement les équations suivantes et factoriser le polynôme :

*Les racines sont à chercher parmi  $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$*

(a)  $x^2 - 6x + 9 = 0$  3 est racine double

(b)  $2x^2 - 3x = 0$  0 et  $\frac{3}{2}$  sont les racines

7. **Trigonométrie.**

(a) Calculer, pour chaque nombre réel  $x$  donné,  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$ .

i.  $x = \frac{5\pi}{6}$  alors  $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\sin(x) = \frac{1}{2}$ .

ii.  $x = \frac{-27\pi}{4}$  alors  $\cos(x) = \cos(6\pi + \frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

(b) Soit  $x$  un réel tel que les expressions suivantes sont bien définies. Simplifier ces expressions en précisant à chaque fois la formule utilisée :

i.  $A = \sin(x + \pi) - \cos(x - \frac{\pi}{2}) = -2\sin(x)$

ii.  $B = \cos(x) - \cos(x - \frac{\pi}{3}) - \cos(x + \frac{\pi}{3}) = 0$

(c) Résoudre les équations suivantes ( attention, il y a une infinité de solutions ) :

i.  $\sin(x) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

ii.  $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathbf{Z}$

8. **Formules exponentielle et logarithme.** Simplifier les expressions suivantes :

(a)  $\ln\left(\frac{2x+1}{x+3}\right) - \ln\left(\frac{4x+2}{x^2-9}\right) = \ln\left(\frac{x-3}{2}\right)$

(b)  $\frac{e^{\ln(x^2)} - e^{-\ln(x)}}{e^{2\ln(x)+1}} = \frac{x^3-1}{ex^3}$

(c)  $\frac{e^{3x+2}e^{-2x}}{e^{9x+6}e^{-16x}} = e^{6x-4}$

9. **Dérivation.**

Dériver les fonctions suivantes en précisant à chaque fois la formule utilisée :

(a)  $f_1 : x \mapsto 8x^7 + \frac{3}{x^2}$  donc  $f_1' : x \mapsto 56x^6 - \frac{6}{x^3}$

(b)  $f_2 : x \mapsto \ln(3x+1)(1-3x)^2$  donc  $f_2' : x \mapsto \frac{3}{3x+1}(1-3x)^2 - 3\ln(3x+1)(1-3x)$

(c)  $f_3 : x \mapsto \sqrt{2x^2-4x}$  donc  $f_3' : x \mapsto \frac{2x-2}{\sqrt{2x^2-4x}}$

10. **Calculs de primitives.**

Déterminer les primitives des fonctions suivantes en rappelant à chaque fois la formule utilisée.

(a)  $f_1 : x \mapsto 8x^7 + \frac{3}{x^2}$  donc  $F_1 : x \mapsto x^8 - \frac{3}{x}$

(b)  $f_2 : x \mapsto xe^{-x^2}$  donc  $F_2 : x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-x^2}$

(c)  $f_3 : x \mapsto \frac{2x}{1-3x^2}$  donc  $F_3 : x \mapsto -\frac{1}{3}\ln(1-3x^2)$

## Test 2 de calculs.

Calculatrice interdite.

Durée 1h, mardi de la rentrée, PCSI

### 1. Le cours .

- (a) Rappeler le graphe de la fonction logarithme.
- (b) Rappeler  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(-x)$
- (c) Rappeler la formule  $\forall a, b \in \mathbf{R}, (a - b)^2 =$
- (d) Rappeler la formule  $\forall a, b \in \mathbf{R}, \sin(a + b) =$ .
- (e) Rappeler la formule  $\forall x, y \in \mathbf{R}, e^{x-y} =$ .
- (f) Rappeler la formule de dérivation :  $(uv)' =$

### 2. Les fractions.

- (a) Simplifier la fraction suivante :  $k \in \mathbf{Z}, \frac{(-3)^{2k+1}}{9^k} =$
- (b) Écrire le nombre suivant sous forme d'une fraction irréductible :  
 $(3 \times 2 \times (-2))\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{-2}\right) =$
- (c) Écrire le nombre suivant sous forme d'une fraction irréductible :  
 $\frac{\frac{4}{5} - \frac{3}{16}}{\frac{1}{5} - \frac{2}{25}} =$
- (d) Mettre sous forme d'une seule fraction, qu'on écrive sous la forme la plus simple possible :  
 $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 0; 1\}, \frac{x^3}{x^3+x^2} + \frac{x}{x+x^2} - \frac{2x^2}{x^3+x} =$

### 3. Puissances.

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme la plus simplifiée possible.

- (a)  $\frac{2^{33} + 2^{34}}{2^{30} - 2^{31}} =$
- (b)  $\frac{(5^2 \times (-3)^4)^8}{((-5)^{-3} \times 3^3)^{-4}} =$

### 4. Racines carrées .

Simplifier les expressions suivantes en prenant soin de ne pas se tromper sur les signes :

- (a)  $\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} =$
- (b)  $\sqrt{(3 - \sqrt{10})^2} =$
- (c)  $\frac{\sqrt{\frac{25}{9}}}{\sqrt{\frac{16}{3}}} =$

### 5. Transformation d'écriture.

Écrire aussi simplement que possible :

- (a)  $x \in \mathbf{R}, (3 - 2x)^2 - (-3 + x)^2 =$
- (b)  $x \in \mathbf{R}, (-1 + 2x^2)^2 =$
- (c)  $(2 - \sqrt{5})^2 - (2 + \sqrt{5})^2 =$
- (d)  $\left(\frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)^2 =$

(e)  $\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{6}}} - \frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2-\sqrt{6}}} =$

6. **Recherche des racines.**

Résoudre mentalement les équations suivantes et factoriser le polynôme :

*Les racines sont à chercher parmi  $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$*

(a)  $x^2 + 4x - 12 = 0$

(b)  $4x^2 - 8 = 0$

7. **Trigonométrie.**

(a) Calculer, pour chaque nombre réel  $x$  donné,  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$ .

i.  $x = \frac{-8\pi}{3}$

ii.  $x = \frac{-65\pi}{4}$

(b) Soit  $x$  un réel tel que les expressions suivantes sont bien définies. Simplifier ces expressions en précisant à chaque fois la formule utilisée :

i.  $A = \cos(x) - \cos(x - \frac{\pi}{4}) - \cos(x + \frac{\pi}{4})$

ii.  $B = \sin(x - \frac{\pi}{2}) + \sin(x + \frac{\pi}{2})$

(c) Résoudre les équations suivantes( attention, il y a une infinité de solutions ) :

i.  $\cos(x) = -1$

ii.  $\sin(x) = 0$

8. **Formules exponentielle et logarithme.** Simplifier les expressions suivantes :

(a)  $\ln(\frac{x-2}{2x+1}) + \ln(\frac{4x+2}{x^2-4})$

(b)  $\frac{e^{-\ln(x^2)} - e^{\ln(2x)}}{e^{\ln(x)-1}}$

(c)  $\frac{e^{x-3}e^{-3x}}{e^{4x+5}e^{-9x}}$

9. **Dérivation.**

Dériver les fonctions suivantes en précisant à chaque fois la formule utilisée :

(a)  $f_1 : x \mapsto \frac{e^x}{(1+x)}$  donc  $f'_1 : x \mapsto$

(b)  $f_2 : x \mapsto x^2 e^{-\frac{2}{x}}$  donc  $f'_2 : x \mapsto$

(c)  $f_3 : x \mapsto \cos(x)\sqrt{\sin(2x)}$  donc  $f'_3 : x \mapsto$

10. **Calculs de primitives.**

Déterminer les primitives des fonctions suivantes en rappelant à chaque fois la formule utilisée.

(a)  $f_1 : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$  donc  $F_1 : x \mapsto$

(b)  $f_2 : x \mapsto \cos(x)\sin(x)^3$  donc  $F_2 : x \mapsto$

(c)  $f_3 : x \mapsto \frac{3x-1}{x^3}$  donc  $F_3 : x \mapsto$

## Test 2 de calculs.

Durée 1h, mardi de la rentrée, PCSI

### 1. Le cours.

- (a) Rappeler le graphe de la fonction logarithme.
- (b) Rappeler  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(-x) = 0$
- (c) Rappeler la formule  $\forall a, b \in \mathbf{R}, (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- (d) Rappeler la formule  $\forall a, b \in \mathbf{R}, \sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$ .
- (e) Rappeler la formule  $\forall x, y \in \mathbf{R}, e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ .
- (f) Rappeler la formule de dérivation :  $(uv)' = u'v + uv'$

### 2. Les fractions.

- (a) Simplifier la fraction suivante :  $k \in \mathbf{Z}, \frac{(-3)^{2k+1}}{9^k} = 3$
- (b) Écrire le nombre suivant sous forme d'une fraction irréductible :  
 $(3 \times 2 \times (-2))\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{-2}\right) = -8$
- (c) Écrire le nombre suivant sous forme d'une fraction irréductible :  
 $\frac{\frac{1}{4} - \frac{3}{16}}{\frac{1}{5} - \frac{2}{25}} = \frac{25}{48}$
- (d) Mettre sous forme d'une seule fraction, qu'on écrive sous la forme la plus simple possible :  
 $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 0; 1\}, \frac{x^3}{x^3+x^2} + \frac{x}{x+x^2} - \frac{2x^2}{x^3+x} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

### 3. Puissances.

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme  $2^n 3^p$  où  $n$  et  $p$  sont des entiers relatifs.

- (a)  $\frac{2^{33} + 2^{34}}{2^{30} - 2^{31}} = -2^3 3^1$
- (b)  $\frac{(5^2 \times (-3)^4)^8}{((-5)^{-3} \times 3^3)^{-4}} = -5^4 3^{44}$

### 4. Racines carrées.

Simplifier les expressions suivantes en prenant soin de ne pas se tromper sur les signes :

- (a)  $\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = \sqrt{5} - 1$
- (b)  $\sqrt{(3 - \sqrt{10})^2} = \sqrt{10} - 3$
- (c)  $\frac{\sqrt{\frac{25}{9}}}{\sqrt{\frac{16}{3}}} = \frac{5\sqrt{3}}{12}$

### 5. Transformation d'écriture.

Écrire aussi simplement que possible :

- (a)  $x \in \mathbf{R}, (3 - 2x)^2 - (-3 + x)^2 = -6x + 3x^2$
- (b)  $x \in \mathbf{R}, (-1 + 2x^2)^2 = 1 - 4x^2 + 4x^4$
- (c)  $(2 - \sqrt{5})^2 - (2 + \sqrt{5})^2 = -8\sqrt{5}$
- (d)  $\left(\frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{9 - 4\sqrt{2}}{3}$

$$(e) \frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} - \frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = -\frac{2+4\sqrt{2}-7\sqrt{6}+2\sqrt{12}}{3}$$

6. **Recherche des racines.**

Résoudre mentalement les équations suivantes et factoriser le polynôme :

*Les racines sont à chercher parmi  $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$*

(a)  $x^2 + 4x - 12 = (x - 2)(x + 6)$  2 est une racine évidente donc la deuxième racine est -6 ( le produit des racines vaut -12)

(b)  $4x^2 - 8 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$  il y a deux racines distinctes.

7. **Trigonométrie.**

(a) Calculer, pour chaque nombre réel  $x$  donné,  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$ .

i.  $x = \frac{-8\pi}{3}$  alors  $\cos(x) = \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$  et  $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

ii.  $x = \frac{-65\pi}{4}$  alors  $\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

(b) Soit  $x$  un réel tel que les expressions suivantes sont bien définies. Simplifier ces expressions en précisant à chaque fois la formule utilisée :

i.  $A = \cos(x) - \cos(x - \frac{\pi}{4}) - \cos(x + \frac{\pi}{4}) = (\sqrt{2} + 1) \cos(x)$

ii.  $B = \sin(x - \frac{\pi}{2}) + \sin(x + \frac{\pi}{2}) = 0$

(c) Résoudre les équations suivantes( attention, il y a une infinité de solutions ) : :

i.  $\cos(x) = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

ii.  $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2m\pi, m \in \mathbf{Z}$

8. **Formules exponentielle et logarithme.** Simplifier les expressions suivantes :

(a)  $\ln(\frac{x-2}{2x+1}) + \ln(\frac{4x+2}{x^2-4}) = \ln(\frac{2}{x-2})$

(b)  $\frac{e^{-\ln(x^2)} - e^{\ln(2x)}}{e^{\ln(x)} - 1} = e^{\frac{1-2x^3}{x^3}}$

(c)  $\frac{e^{x-3}e^{-3x}}{e^{4x+5}e^{-9x}} = e^{3x-8}$

9. **Dérivation.**

Dériver les fonctions suivantes en précisant à chaque fois la formule utilisée :

(a)  $f_1 : x \mapsto \frac{e^x}{(1+x)}$  donc  $f_1' : x \mapsto \frac{xe^x}{(1+x)^2}$

(b)  $f_2 : x \mapsto x^2 e^{-\frac{2}{x}}$  donc  $f_2' : x \mapsto (2x + 2)e^{-\frac{2}{x}}$

(c)  $f_3 : x \mapsto \cos(x)\sqrt{\sin(2x)}$  donc  $f_3' : x \mapsto -\sin(x)\sqrt{\sin(2x)} + \frac{2\cos(2x)}{2\sqrt{\sin(2x)}} \cos(x)$

10. **Calculs de primitives.**

Déterminer les primitives des fonctions suivantes en rappelant à chaque fois la formule utilisée.

(a)  $f_1 : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$  donc  $F_1 : x \mapsto 2\sqrt{\sin(x)}$

(b)  $f_2 : x \mapsto \cos(x) \sin(x)^3$  donc  $F_2 : x \mapsto \frac{\sin(x)^4}{4}$

(c)  $f_3 : x \mapsto \frac{3x-1}{x^3} = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}$  donc  $F_3 : x \mapsto -\frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2}$

# Calculs corrigés en SI

Vous trouverez sur le lien suivant, ou avec le QR code, une feuille de calculs et son corrigé. Ce sont des calculs "classiques" en SI qu'il est bon de savoir faire.

**Exercices corrigés**

