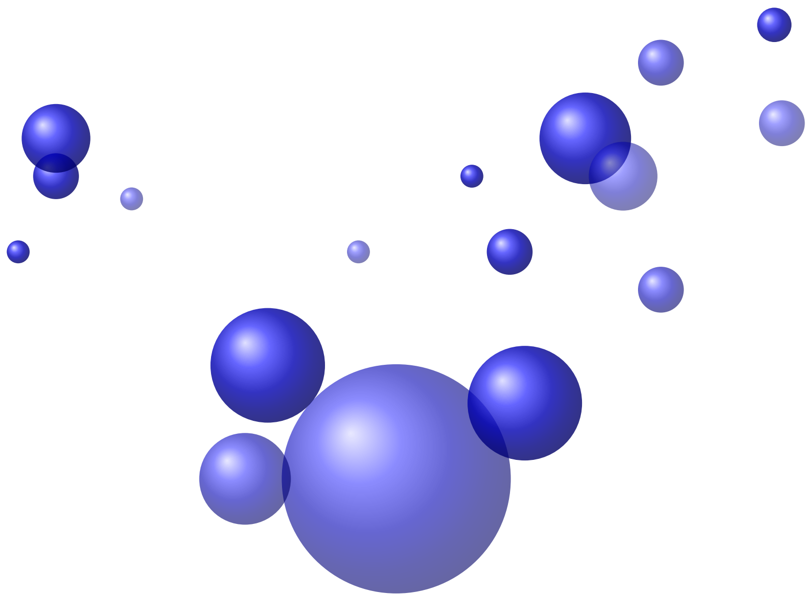
Techniques calculatoires

Nous vous invitons à compléter les points de cours, à faire les exercices types, si vous les réussissez du premier coup, c'est que vous êtes au point sinon peut-être cliquer sur le lien pour vous entrainer et persévérer.

Nous vous assurons qu'une grande partie de votre réussite dans les matières scientifiques repose sur vos capacités à mener un calcul juste jusqu'au bout. Nous vous encourageons à faire un peu chaque jour. 10 jours pour être bien préparer !

Le document est à nous retourner compléter le jour de la rentrée. Apporter vos recherches écrites des "exercices à maîtriser" pour le mardi.



Entrainement Jour 1.

Rappel sur les fractions :

Soient $p, q, m, n \in \mathbf{Z}$ alors

$$q \neq 0, n \neq 0, \qquad \frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \text{———}$$

$$q \neq 0, n \neq 0, m \neq 0, \qquad \frac{\frac{p}{q}}{\frac{m}{n}} = \text{——}$$

Rappel sur les identités remarquables :

Soient $a, b \in \mathbf{R}$,

$$(a+b)^2 = \qquad\qquad , \ (a-b)^2 = \qquad\qquad , \ (a-b)(a+b) =$$

Rappel sur la fonction racine carrée :

Soient $a, b \in \mathbf{R}^+$,

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \qquad\qquad , \ b \neq 0, \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \qquad\qquad , \ (\sqrt{a})^2 =$$

Exercices types

1. Simplifier
$$E = \left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}} + \sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}} \right)^2$$
2. Mettre
$$\frac{\frac{12{,}5.d.20.10^{-2}}{(1+0{,}0625.p).p}}{1+\frac{12{,}5.d.20.10^{-2}}{(1+0{,}0625.p).p}}$$
sous la forme $\frac{1}{1+Ap+Bp^2}$, préciser A et B.
3. Mettre
$$\frac{\frac{K_c.D.0{,}064.0{,}7}{p(1+0{,}03p)}}{1+\frac{C.D.0{,}064.0{,}7}{p(1+0{,}03p)}}$$
sous la forme $\frac{1}{1+Ap+Bp^2}$, préciser A et B.
4. Faites les applications numériques suivantes, en ordre de grandeur, sans calculatrice :
$$\frac{2\pi}{180}\frac{1}{50} \qquad \frac{15 \times 14}{75 \times 35} \qquad \frac{360}{2000}$$

Pour s'entrainer

Fractions
Racines carrées

Entrainement Jour 2.

Calcul de puissance

- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, v $x^n = x.x\ldots.x$ (n **fois**)
- Pour tout $x \neq 0$, $x^{-1} = \frac{1}{x}$ et pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $\quad x^n = x.x\ldots.x$ (n **fois**)
- Pour tout $x \neq 0$, pour tout $(m,n) \in \mathbf{Z}^2$, $\quad (x^m)^n = (x^n)^m = x^{mn}$
- Pour tout $x, y \neq 0$, pour tout $m \in \mathbf{Z}$, $\quad (xy)^m = x^m y^m$
- Pour tout $x \neq 0$, pour tout $m, p \in \mathbf{Z}$, $\quad x^m x^p = x^{\cdots\cdots}$ **et** $\frac{x^m}{x^p} = x^{\cdots\cdots}$
- Pour tout $m \in \mathbf{Z}$, $(-1)^{2m} = 1$, $(-1)^{2m+1} = -1$.

Exercices types

1. Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs :

$$\frac{6^5}{2^5}\ ,\ (10^5)^3\ ,\ \frac{(10^3)^{-5}10^5}{10^3 10^{-5}}$$

2. Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n 3^p$ avec p et n deux entiers relatifs :

$$2^{21} + 2^{22}\ ,\ \frac{(3^2.(-2)^4)^8}{((-3)^5 2^3)^{-2}}$$

3. Simplifier et exprimer en fonction de $y \in \mathbf{R}^*$:

$$\frac{(y^2)^{-3}((-y)^2)^{-1}}{(-y)^7(-y^2)^{-5}} =$$

4. Soit $m \in \mathbf{Z}$, déterminer $l \in \mathbf{Z}$ en fonction de m tel que :

$$E = \frac{4^m}{8^{2m-1}2^{-3m}} = 2^l$$

5. Simplifier $(a^{2^n} - b^{2^n})(a^{2^n} + b^{2^n})$ pour tout $(a,b,n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{N}^*$. *Attention ... bien lire ...* 2^n *et non* $2n$.
6. Simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x :

$$\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x}$$

7. Simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x :

$$\frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x}$$

Pour s'entrainer

Fonction carré
Puissances
Calcul littéral

Entrainement Jour 3.

Calculs avec la fonction exponentielle :

— Pour tout $x, y \in \mathbf{R}$,

$$e^x e^y = \dots \qquad \frac{1}{e^x} = \dots \qquad \frac{e^x}{e^y} = \dots$$

— Pour tout $x \in \mathbf{R}$, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $(e^x)^m = e^{xm}$.

Exercices types

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$
2. Soit $x, y \in \mathbf{R}$, montrer qu'il existe $a, b \in \mathbf{R}$ telle que :
$$Q = \frac{e^{3x}+e^{y-x}}{e^{x+y}+e^{2y-3x}} = \frac{e^x(e^{\cdots\cdots}+e^{\cdots\cdots})}{e^{y-x}(e^{\cdots\cdots}+e^{\cdots\cdots})} = e^{ax}e^{by}$$
3. Résoudre dans $\mathbf{R}$, l'inéquation suivante en posant $T = e^x$:
$$e^{2x}+2e^x-3 \leq 0$$
4. Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbf{R}$: $e^{-6x} \leq \sqrt{e}$

Pour s'entrainer

Propriétés de la fonction exponentielle
Fonction exponentielle

Entrainement Jour 4.

Calculs avec la fonction logarithme :

— Pour tout $x, y > 0$, $n \in \mathbf{N}$

$$\ln(xy) = \ldots \qquad \ln(x) - \ln(y) = \ldots \qquad \ln(x^n) = \ldots$$

— Pour tout $x > 0$, $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

— Pour tout $x, y > 0$,

$$\log(xy) = \ldots \qquad \log(\frac{1}{x}) = \ldots \qquad \log(x^n) = \ldots$$

— Pour tout $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\ln(e^x) = x$.

Exercices types

1. Exprimer en fonction de $\ln(x)$ et $\ln(y)$ la quantité suivante :

$$S = \frac{\ln(y^2 e^{\ln(x)})}{2 + \ln(\frac{x}{e^2})}$$

2. On considère l'expression :

$$E = E^0 + \frac{0.06}{2}\, log\left(\frac{[H^+]^3[B]^4}{[A]^4}\right)$$

Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbf{R}$ telles que :

$$E = E^0 + a\ pH + b\ log\left(\frac{[A]}{[B]}\right)$$

où $pH = -\,log([H^+])$

3. Simplifier :

$$e^{3\ln(2)} = \ldots\ldots\ldots \qquad e^{-\ln(3)} = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad e^{-2\ln(4)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

4. Simplifier :

$$\ln(\sqrt{\exp(-\ln(e^2))}) = \ldots\ldots\ldots \qquad e^{-\ln(\ln(2))} = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad e^{-\frac{1}{3}\ln(e^{-3})} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour s'entrainer

Fonction logarithme
Fonction ln

Entrainement Jour 5.

Calculs de dérivées :

- Soit u une **fonction dérivable** ,

$$(e^u)' = ... \qquad (u^n)' = ... \qquad (\sqrt{u})' = ... \qquad (\ln(u))' = ...$$

- Soient u et v deux **fonctions dérivables**,

$$(\frac{1}{u})' = \qquad (uv)' = \qquad (\frac{u}{v})' =$$

$$(\cos(u))' = ... \qquad (\sin(u))' = ...$$

- Écrire les résultats précédents avec la notation en physique : $u' = \frac{du}{dt}$
- Soient u et v deux **fonctions dérivables**,

$$\frac{d(\frac{1}{u})}{dt} = \qquad \frac{d(uv)}{dt} = \qquad \frac{d(\frac{u}{v})}{dt} =$$

$$\frac{d(\cos(u))}{dt} = \qquad \frac{d(\sin(u))}{dt} =$$

Exercices types

1. Soit a un réel,
   $u : t \longmapsto \cos(at)$ **alors** $\frac{du}{dt}(t) =$
   $v : t \longmapsto \sin(at)$ **alors** $\frac{dv}{dt}(t) =$
   $w : t \longmapsto \exp(at)$ **alors** $\frac{dw}{dt}(t) =$
   $r : t \longmapsto \ln(at)$ **alors** $\frac{dr}{dt}(t) =$
2. Soit u une fonction,
   Exprimer $(\frac{du^2}{dt})(t) =$ en fonction de $u(t)$ et $\frac{du}{dt}(t)$.
   Exprimer $(\frac{d\frac{1}{u}}{dt})(t) =$ en fonction de $u(t)$ et $\frac{du}{dt}(t)$.
3. Calculer la dérivée des fonctions suivantes par rapport à la variable de la fonction :
   (a) $[A](t) = [A]_0 e^{-kt}$ avec $[A]_0, k$ deux constantes. Calculer $\frac{d[A]}{dt}$.
   (b) $u(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(w_0 t)$ avec U_0, τ, w_0 des constantes. Calculer $\frac{du}{dt}$.
   (c) $y(\theta) = \frac{\lambda}{1-\mu_0\theta}$ avec λ, μ_0 deux constantes. Calculer $\frac{dy}{d\theta}$.
4. Étudier les variations de la fonction $f_\beta : x \longmapsto \frac{1}{x\ln(x)^\beta}$ sur $[e^{-\beta}; +\infty[$.
5. Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

$$f(x) = \ln(\ln(x)) \quad , \quad f(x) = (\sin(x) + 2\cos(x))^2 \quad , \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x + 2\ln(x)}$$

Pour s'entrainer

Dérivation

Entrainement Jour 6.

Problème de conversion :

On se demande pourquoi on introduit toutes ces unités différentes ? Pour piéger les étudiants ? Non ! Pour manipuler des valeurs avec le moins de puissance de 10.

Exercices types

1. En atomistique le classique est le passage Joule/électron-volt pour l'énergie et nanomètre/mètre pour la longueur d'onde.
   Exemple : l'énergie du photon est donnée par la relation $E = \frac{hc}{\lambda}$ avec :
   h : constante de Planck $= 6,62.10^{-34} J.s$
   c : célérité de la lumière $c = 3.10^{8} m.s^{-1}$
   λ : longueur d'onde en m.
   (a) Quelle est l'unité de l'énergie du photon ?
   (b) Pour une transition de $600nm$ que vaut l'énergie du photon émis en joule et en eV sachant que $1eV = 1,6.10^{-19}J$.

2. En cristallographie le classique est le calcul de la masse volumique en kg.m-3 ou g.cm-3 à partir de rayons donnés en picomètres.
   Exemple : la masse volumique d'un cristal de cuivre est $\rho = \frac{4M}{N_a a^3}$ avec :
   M : masse molaire du cuivre$= 63,5g/mol$
   Na : nombre d'Avogadro $= 6,02.10^{23} mol^{-1}$
   a : paramètre de la maille $a = 361pm$
   (a) Que vaut un picomètre en mètre ? en centimètre ?
   (b) Calculer la masse volumique du cuivre en $kg.m^{-3}$ et en $g.cm^{-3}$

3. En solutions aqueuses le classique est le calcul de la capacité d'une pile/durée de vie.
   Exemple : la capacité de la pile Daniell est donnée par $Q = I.\Delta t = 2.F.\epsilon$ en Coulomb (C) avec :
   I : intensité en A
   Δt : durée de la pile en s
   F : constante de Faraday $= 96500 C.mol^{-1}$
   ϵ : avancement de la réaction en mol
   (a) Quelle est la capacité d'une pile dont l'avancement est de 10 $mmol$?
   (b) Pour une intensité de 100 mA quelle est sa durée de vie en s et en h ?

4. Comment convertir $2500\, t/min (ou tour/min)$ en rad/s ?
   Exprimons les relations entre ces unités : $1\, tour = 2\pi\, rad$ et $1\, min = 60\, sec$.
   On obtient alors : $2500\, t\, /\, min = 2500 \frac{tour}{min} = 2500 \frac{2\pi rad}{60 sec} = 262 \frac{rad}{sec}$.
   Il est souvent plus judicieux d'exprimer les unités avec des exposants plutôt que des fractions.
   On gagnera à écrire $262 rad.s^{-1}$.

5. Convertir :
   (a) convertir $110\, km.h^{-1}$ en $m.s^{-1}$.
   (b) Convertir $1/Ke = 274 Rpm/v$ en $rad.s^{-1}.v^{-1}$. On précise Rpm : Rotation par minute. Exprimer ensuite Ke en $v.s.rad^{-1}$.

Entrainement Jour 7.

Fonctions composées :

— Soit h_1 et h_2 deux fonctions, on appelle composition de h_1 suivi par h_2 que l'on note $h_2 o h_1$ (on lit h_2 rond h_1) la fonction définie par :

$$h_2 o h_1(t) = h_2(h_1(t))$$

— Soit h_1 une fonction dérivable sur un intervalle I et h_2 une fonction dérivable sur un intervalle J avec $h_1(I) \subset J$ alors $h_2 o h_1$ est dérivable sur I et

$$(h_2 o h_1)' = h_1' \ \ h_2' o h_1$$

Exercices types

1. Soient f et g deux fonctions, déterminer fog et gof :
   (a) $f : t \longmapsto \exp(t)$ et $g : t \longmapsto \lambda t$ alors
   $fog(t) =$ et $gof(t) =$.
   (b) $u : t \longmapsto \ln(t)$ et $v : t \longmapsto 2 - t$ alors
   $uov(t) =$ et $vou(t) =$.
2. Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :
   (a) $x \in]0; \pi[$, $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$
   (b) $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = \sin(\sqrt{x})$
3. Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :
   (a) $x \in \mathbf{R}^*$, $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$
   (b) $x \in]0; \pi[$, $f(x) = \ln(\frac{\sin(x)}{x})$
4. $E : t \longmapsto E_0 + \frac{RT}{nF} \ln(c_0 - x(t))$ où x est la fonction d'avancement volumique et E_0, R, T, n, F, c_0 sont des constantes.
   Calculer $\frac{dE}{dt}$ en fonction de x et $\frac{dx}{dt}$.

Pour s'entrainer

Dérivation

Entrainement Jour 8.

Vecteurs et produit scalaire :

— Le cours sur les vecteurs est traité en classe de seconde ainsi que le cours sur les droites.
Équation de droite
Les vecteurs

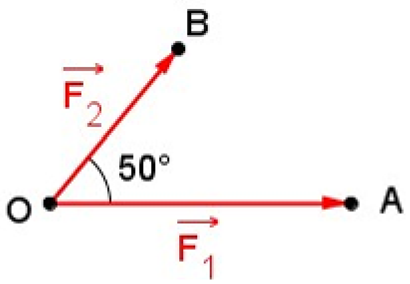
— Le cours sur le produit scalaire est traité en classe de première avec des vecteurs de $\mathbf{R}^2$.
Produit scalaire

— Le cours sur le produit scalaire est traité en classe de terminal avec des vecteurs de $\mathbf{R}^3$.
Produit scalaire dans l'espace

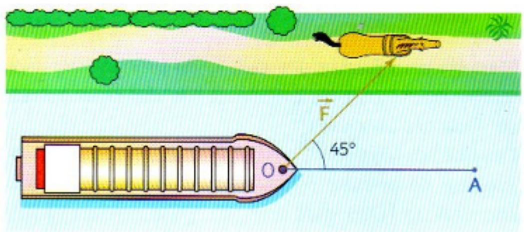
— Le cours de géométrie dans l'espace est traité en classe de terminal.
Géométrie vectorielle

Exercices types

1. Un point O est soumis à deux forces et qui forme un angle de 50 degré. Les intensités des deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont respectivement 300 N et 200 N. Par définition, la résultante des force est le vecteur $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$. Calculer l'intensité de la résultante, à un newton près.



2. Pour tirer sur 50 m de O en A une péniche légère, un cheval, placé sur le chemin de halage exerce une force $\overrightarrow{F}$ d'intensité de 2000 newtons selon une force de 45 avec la direction du déplacement.
Quel est le travail W de la force ?



Pour s'entrainer

Produit scalaire
Géométrie dans l'espace
Géométrie dans l'espace

Entrainement Jour 9.

Comment résoudre une inéquation ou montrer une inégalité ?

— on identifie l'inconnue ou la variable et éventuellement les paramètres
— on donne le domaine d'existence de l'équation (critères)
— on ajoute ou soustrait un même nombre de part et d'autre du symbole d'inégalité
— on multiplie ou on divise par un nombre NON NUL et DONT ON CONNAIT LE SIGNE de part et d'autre du symbole d'égalité. SI le nombre est NÉGATIF il faut changer le sens des inégalités.
— on peut aussi essayer de factoriser pour se ramener à un produit nul ou d'étudier une fonction ou de raisonner par équivalence.
— le but étant d'exprimer l'inconnue en fonction des paramètres en traitant des cas SI NÉCESSAIRE.

Comment étudier le signe d'une fonction ?

— on identifie l'inconnue ou la variable et éventuellement les paramètres
— on donne le domaine d'existence de la fonction (critères)
— on peut effectuer **un tableau de signe**
— on peut étudier les variations de la fonction et trouver les valeurs où elle s'annule

Exercices types

1. Résoudre **graphiquement** puis numériquement $X^2 \leq 16$ à l'aide du graphe de la fonction $t \longmapsto t^2$ (que vous représenterez).
2. Résoudre **graphiquement** puis numériquement $X^2 > 25$ à l'aide du graphe de la fonction $t \longmapsto t^2$ (que vous représenterez).
3. Résoudre à l'aide de la question précédente l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbf{D}$ (à préciser),
$$\left(\frac{3x+1}{6x-3}\right)^2 \leq 16$$
*Indication : **Rappeler les opérations autorisées dans les inégalités et les conditions de ces opérations**. Pensez aux signes des termes manipulés. Vous réaliserez des tableaux de signes (révisions).*
4. Résoudre :
$$-1 < \frac{2x}{1+x^2} < 1$$
5. Trouver le domaine de définition de $x \longmapsto \ln(\frac{x-2}{x+1})$ à l'aide d'un **tableau de signe**.

Entrainement Jour 10.

Géométrie et trigonométrie :

— On considère le cercle trigonométrique et un point de ce cercle. Le radian est une unité de mesure des angles de façon que l'angle plat 180 mesure π.
Ainsi un arc de cercle de rayon R et d'angle α (radian) a pour longueur $L = \alpha R$.

— Compléter sous forme d'un tableau la correspondance entre les angles en degré et en radian

Angle en radian	π	0	2π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Angle en degré						

— Soit un angle α repéré par un point M sur le cercle trigonométrique. On appelle :
- $\cos(\alpha) = \overline{OH}$ où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.
- $\sin(\alpha) = \overline{OK}$ où K est le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

— *Tableaux angles remarquables* ♡♡

Angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$				
sin	0	$\frac{1}{2}$				

— *Formules d'addition* ♡♡.

$\cos(a+b) =$ **et** $\cos(a-b) =$
$\sin(a+b) =$ **et** $\sin(a-b) =$

Exercices types

1. Calculer les valeurs exactes des expressions suivantes : $\cos(\frac{538\pi}{3})$, $\sin(\frac{123\pi}{6})$, $\cos(\frac{-77\pi}{4})$
2. Sachant que $\cos(x) = -\frac{4}{5}$, calculer $\cos(x-\pi)$, $\sin(-x-\pi)$, $\cos(\frac{\pi}{2}+x)$, $\sin(\frac{\pi}{4}-x)$.
3. L'un des rayons d'un faisceau de lumière, se propageant dans l'air, et arrivant sur une surface plane de verre. Données : indice de réfraction du verre $n_{verre} = 1,52$.
   (a) Schématiser la situation illustrant le phénomène de réfraction.
   (b) Écrire la deuxième loi de DESCARTES.
   (c) En déduire la valeur de l'angle d'incidence permettant d'obtenir un angle de réfraction de 20 degré.
4. Lorsqu'un système se déplace d'un point A à un point B, le travail $W_{AB}((\vec{F}) = \vec{F}.\vec{AB} = F \times AB \times \cos(\theta)$.
   W le travail (en J) F la norme de la force constante (en N) AB la longueur du segment $[AB]$ (en m) $\theta = (\vec{F}, \vec{AB})$ (en degré ou rad)
   Un morceau de savon de masse $m = 220g$ glisse sans frottement sur un plan incliné d'un angle de 30 degré par rapport à l'horizontale. Donnée : $g = 9.8N.kg^{-1}$
   (a) Quelles sont les forces exercées sur le morceau de savon ?
   (b) Calculer le travail de ces forces pour un déplacement égal à $L = 1.0m$.
   (c) Calculer la puissance moyenne du travail du poids si la durée de trajet est égale à $\Delta t = 1,5s$.

Pour s'entrainer

Cours de trigo
Exercice de trigo