MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades académiques de mathématiques 2024

Académie de Rennes

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La seconde partie est constituée des exercices académiques et résolue en équipes de 2, 3 ou 4 candidats : **une seule copie par équipe**, portant les noms de tous les membres de l'équipe, est remise à la fin de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Seconde Partie

Exercices académiques

Epreuve par équipes de 2, 3 ou 4 candidats

La seconde partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les équipes de candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.

Les autres équipes de candidats doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

L'énoncé académique comporte 9 pages

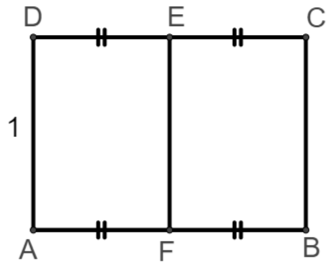
Exercice 1 (pour tous les candidats) : Formats en Or

Introduction

On appelle **format** d'un rectangle le rapport de sa longueur par sa largeur.

Ainsi un rectangle ayant pour longueur 3 et largeur 2 est de format 1,5.

1. Quel est le format d'un carré ?
2. Quel est le format d'un rectangle de largeur 5 et de périmètre 30 ?
3. Montrer que si deux rectangles ont le même format alors l'un est un agrandissement de l'autre.
4. Le rectangle ABCD ci-contre de largeur 1, a la particularité suivante : si on le partage en deux rectangles par sa longueur AB alors on obtient deux rectangles identiques AFED et FBCE qui ont le même format que le rectangle ABCD.

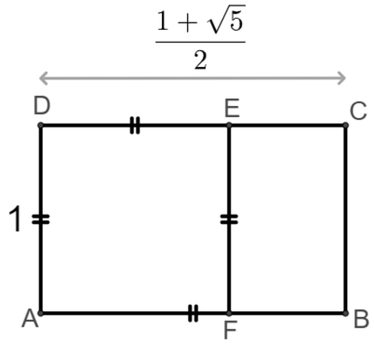


   a) Exprimer en fonction de AB les formats des rectangles ABCD et AFED.

   b) En déduire la longueur AB.

5. Le rectangle ABCD ci-contre de largeur 1 et de longueur $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé rectangle d'or.

   Vérifier que si on lui enlève le carré AFED alors le rectangle restant FBCE a le même format que le rectangle ABCD.



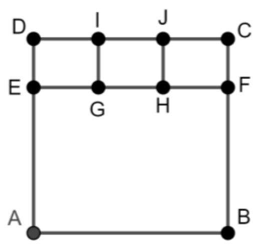
Dans la suite de ce problème on découpe un carré de côté 1 en plusieurs rectangles de même format.

Partie A : On découpe le carré de côté 1 en quatre rectangles de même format

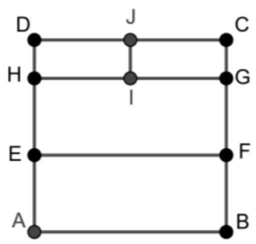
On admet qu'il y a 11 découpages possibles et on s'intéresse à quelques cas.

1. Il y a deux façons très simples de découper un carré en quatre rectangles de même format.
   Pour chacun de ces deux cas faire un dessin à main levée puis donner le format de ces quatre rectangles.
2. Pour chacune des figures ci-dessous, déterminer le format commun des quatre rectangles.
   On justifiera dans le cas a) que les rectangles DIGE, IJHG et JCFH sont identiques.

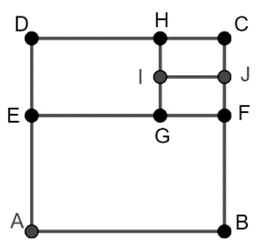
Cas a)



Cas b)



Cas c)



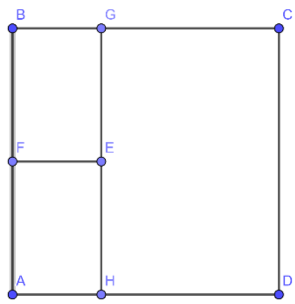
Partie B : Découpage d'un carré en n rectangles

Proposer un découpage d'un carré de côté 1 en *n* rectangles de même format où *n* est un entier supérieur ou égal à 5, et donner le format de ces *n* rectangles.

Partie C : On découpe le carré de côté 1 en trois rectangles de même format

Premier cas :

Pour la figure ci-contre, déterminer le format des trois rectangles.



Second cas :

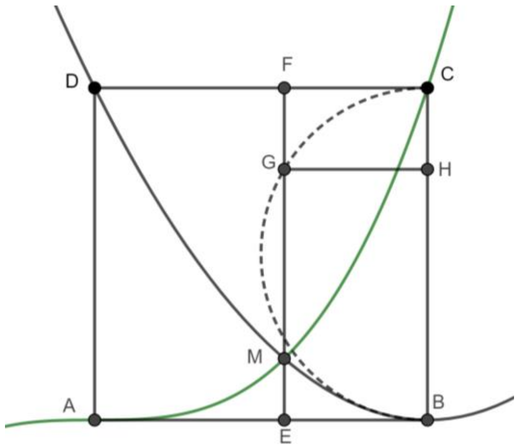
A partir du carré ABCD on a réalisé ci-dessous la construction suivante :

- Dans le repère orthonormé $(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}})$ on a tracé les courbes d'équations $y = x^3$ et $y = (x-1)^2$. Ces courbes ont un unique point d'intersection noté M.

- Par le point M on a tracé le segment [EF] parallèle à la droite (BC), avec E sur [AB] et F sur [CD].

- Le cercle de diamètre [BC] coupe le segment [EF] en deux points. On nomme G, celui qui est plus proche de F que de E. On admet que le triangle CGB est rectangle en G.

- Perpendiculairement au segment [EF] a été construit le segment [GH], avec H situé sur [BC].



Dans ce qui suit, on note $AE = a$ et $CH = b$.

1. Montrer que a, abscisse du point M ne peut pas être inférieure à 0,5.
2. Montrer que a est solution de l'équation $a^3 - a^2 + a = 1 - a$
   Démontrer que les trois rectangles AEFD, BEGH et CFGH sont de même format.
   On pourra utiliser en particulier le résultat ci-dessous.
   Dans le triangle BCG rectangle en G, on a l'égalité : $HB \times HC = GH^2$.

Exercice 2 (pour les candidats suivant l'enseignement de spécialité mathématiques de la voie générale) : Malfatti a des ronds

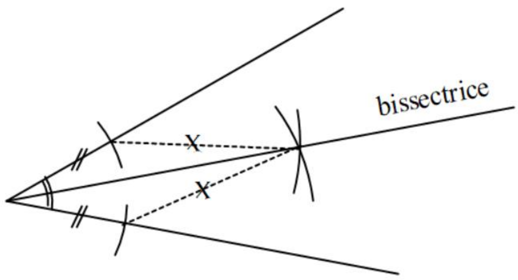
Gian Francesco Malfatti était un mathématicien italien qui, au début du 19ème siècle, a étudié des problèmes de trois cercles dans un triangle.

Partie A : **Quelques préalables**

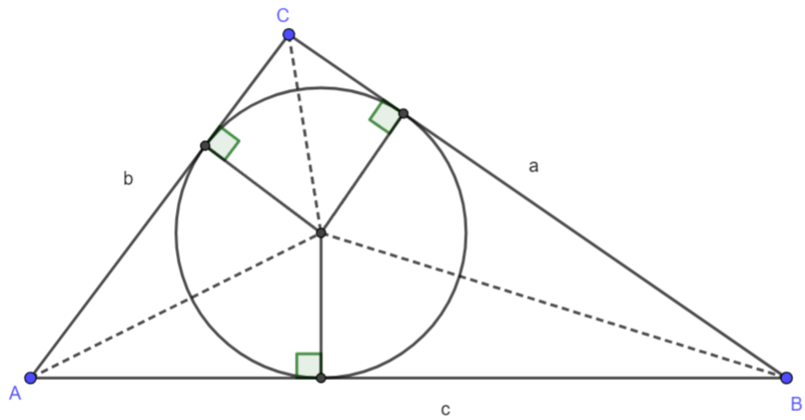
Tout triangle possède un cercle inscrit, c'est-à-dire un cercle tangent à chaque côté du triangle.
On construit le cercle inscrit d'un triangle ainsi :

- On trace les bissectrices des angles de ce triangle.
- Ces bissectrices se coupent en un seul point qui est le centre du cercle inscrit au triangle.

Pour construire la bissectrice d'un angle à l'aide d'un compas, on procède comme le montre le schéma ci-contre :



Voici un triangle ainsi que son cercle inscrit :



1. Construire le cercle inscrit au triangle de la figure 1 donnée en annexe.
   On laissera visibles les traits de construction.

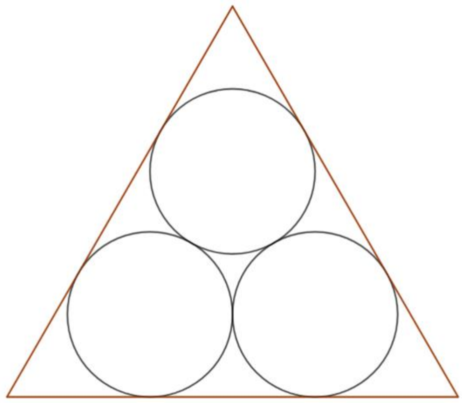
2. On appelle S l'aire du triangle ABC, p son périmètre et R le rayon du cercle inscrit.
   Prouver que $S = \frac{R \times p}{2}$.
   Aide : on pourra penser à un découpage astucieux du triangle.

3. On considère un triangle équilatéral de côté x. Prouver que la hauteur de ce triangle vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Partie B : **Triangle équilatéral**

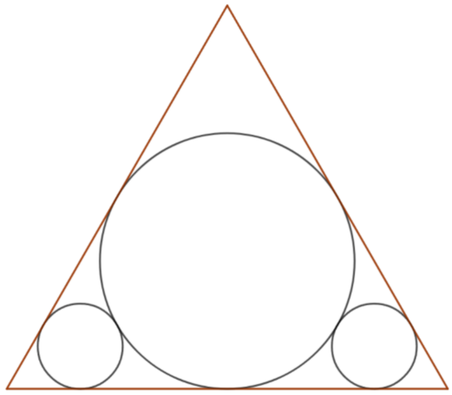
À l'intérieur des deux **triangles équilatéraux identiques de côté 1** ci-dessous ont été construits trois cercles.

<u>Configuration 1</u>



Les trois cercles sont identiques et chacun d'eux est tangent aux deux autres cercles ainsi qu'à deux côtés du triangle.

<u>Configuration 2</u>



Le grand cercle est tangent aux trois côtés du triangle ; les deux petits cercles sont identiques et chacun d'eux est tangent au grand cercle ainsi qu'à deux côtés du triangle.

Le but de cette partie est de déterminer pour laquelle de ces deux configurations la somme des aires des trois disques est la plus grande.

1. <u>Configuration 1</u>

   a. Les trois cercles peuvent être inscrits séparément dans trois triangles rectangles de mêmes dimensions.
   Sur la figure 2 donnée en annexe, reproduire la configuration 1.
   b. Déterminer les longueurs des côtés de ces triangles rectangles et leur aire.
   c. En déduire que le rayon des cercles est $r = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$.
   d. Calculer l'aire totale occupée par les trois cercles de la configuration 1.

2. <u>Configuration 2</u>

   a. Montrer que le rayon du grand cercle est $R = \frac{\sqrt{3}}{6}$.
   b. Chaque petit cercle est inscrit dans un petit triangle équilatéral qui est une réduction du grand triangle. Expliquez comment tracer ce petit triangle et déterminer l'échelle de la réduction.
   c. Sur la figure 3 donnée en annexe, reproduire la configuration 2.
   d. Déterminer le rayon des deux petits cercles.
   e. Calculer l'aire occupée par les trois cercles de la configuration 2.

3. <u>Bilan</u> : De ces deux configurations quelle est celle dont les trois cercles occupent le plus de surface ?

Partie C : **Triangle rectangle**

Dans le triangle IJK rectangle en I ci-contre ont été dessinés trois cercles, un grand, un moyen et un petit, de rayons respectifs 9, 3 et 1 et de centres respectifs A, B et C.

Le grand cercle est tangent aux trois côtés du triangle et au cercle moyen.

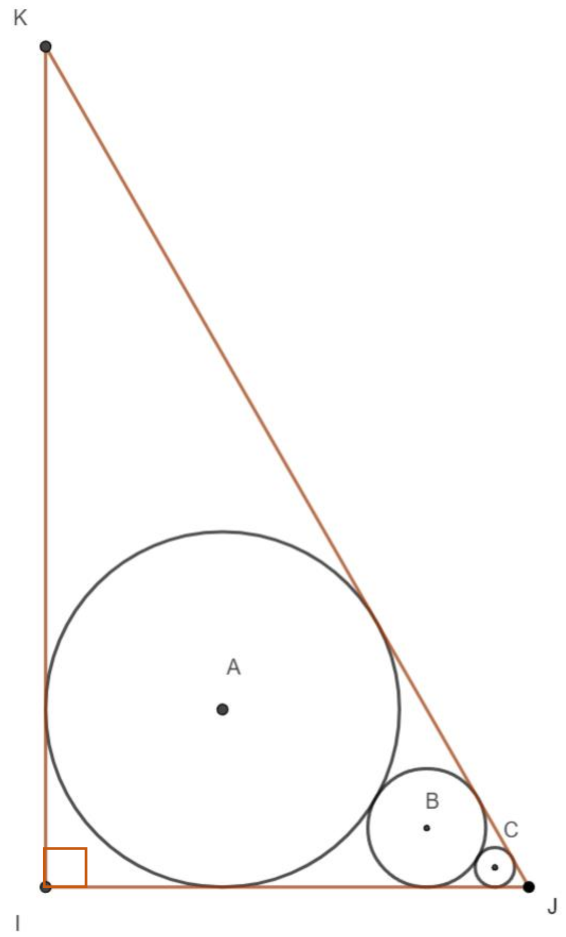
Le cercle moyen est tangent à deux côtés du triangle et aux deux autres cercles.

Le petit cercle est tangent à deux côtés du triangle et au cercle moyen.

Calculer l'aire du triangle.

Aide :
On pourra considérer E le point d'intersection de la parallèle à (IJ) passant par B, et de la parallèle à (IK) passant par A.

Toute trace de recherche sera valorisée.



Exercice 3 (pour les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale) : Carrés « magnétiques »

Hermione a inventé un jeu :
Elle choisit un nombre entier A. Harry doit alors placer tous les nombres entiers de 1 à 9 sur un carré quadrillé comme celui représenté ci-contre, en faisant en sorte que la somme sur chaque ligne ainsi que sur chaque colonne soit **inférieure ou égale à A**.
La somme sur les diagonales n'est pas prise en compte.
Un tel carré est appelé un carré « magnétique ».

1. Quand Harry propose un carré, combien de sommes Hermione doit-elle calculer pour vérifier que le carré d'Harry est bien « magnétique » ?

2. a. Hermione propose de prendre $A = 16$.
Voici le carré proposé par Harry.
Pourquoi ne convient-il pas ?

6	1	9
8	5	2
3	7	4

b. Hermione, d'un coup de baguette magique, échange deux des nombres placés par Harry et le carré devient alors « magnétique ».
Comment est-ce possible ? Donner le carré que vous avez trouvé et justifier qu'il est bien « magnétique ». Existe-t-il d'autres solutions ?

3. Hermione propose de prendre $A = 11$.
Harry refuse de jouer et dit « Lorsque j'aurai placé le 9 sur une ligne … »
Recopier et compléter sa phrase pour justifier précisément son refus.

4. Hermione propose maintenant de prendre $A = 30$.
Harry refuse encore de jouer et dit : «*Dans ce cas, pas besoin d'être magicien pour obtenir un carré « magnétique ». Je peux même te dire qu'il y a plus de 362 000 façons de le faire* ».
Justifier sa phrase.

5. a. Après avoir calculé la somme de tous les nombres entiers de 1 à 9, justifier que l'on ne peut pas proposer un carré « magnétique » si le nombre A est strictement inférieur à 15.

b. Hermione propose de prendre $A = 15$.
Harry déclare que, dans ce cas, chaque somme est exactement égale à 15.
Justifier son affirmation.

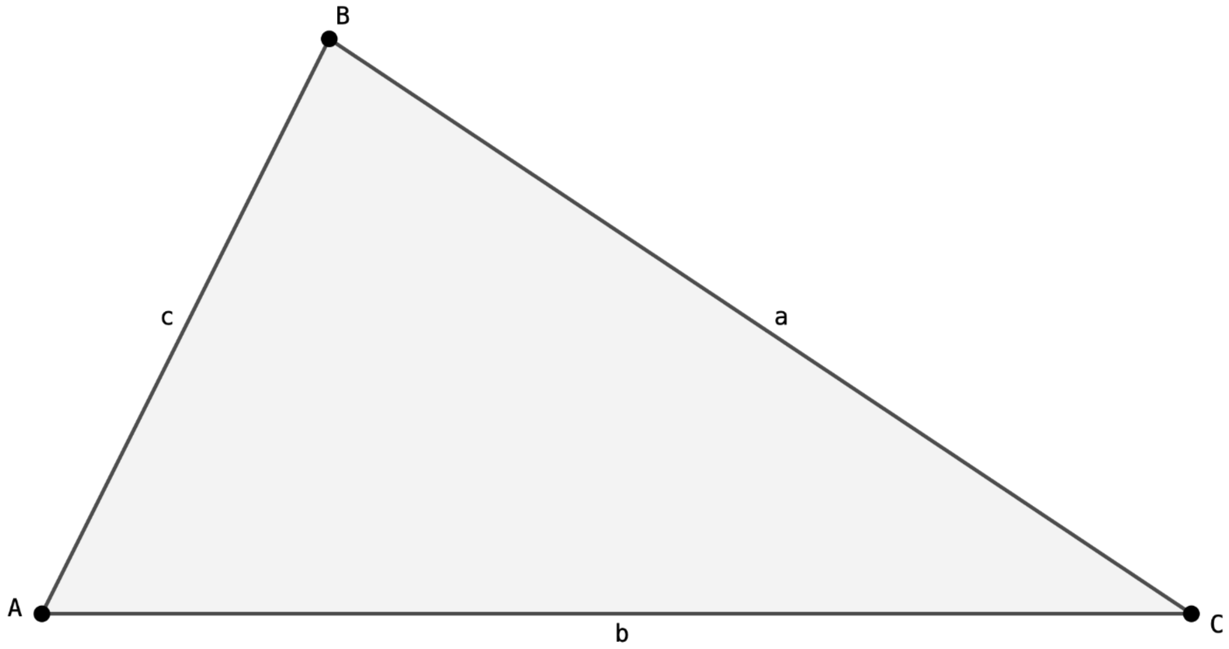
6. Harry suggère à Hermione d'ajouter à la règle du jeu que l'entier A doit appartenir à l'intervalle $[15\,;24]$. Pourquoi ?

7. Harry propose de prendre $A = 23$. Combien y a-t-il de carrés « magnétiques » dans ce cas ?

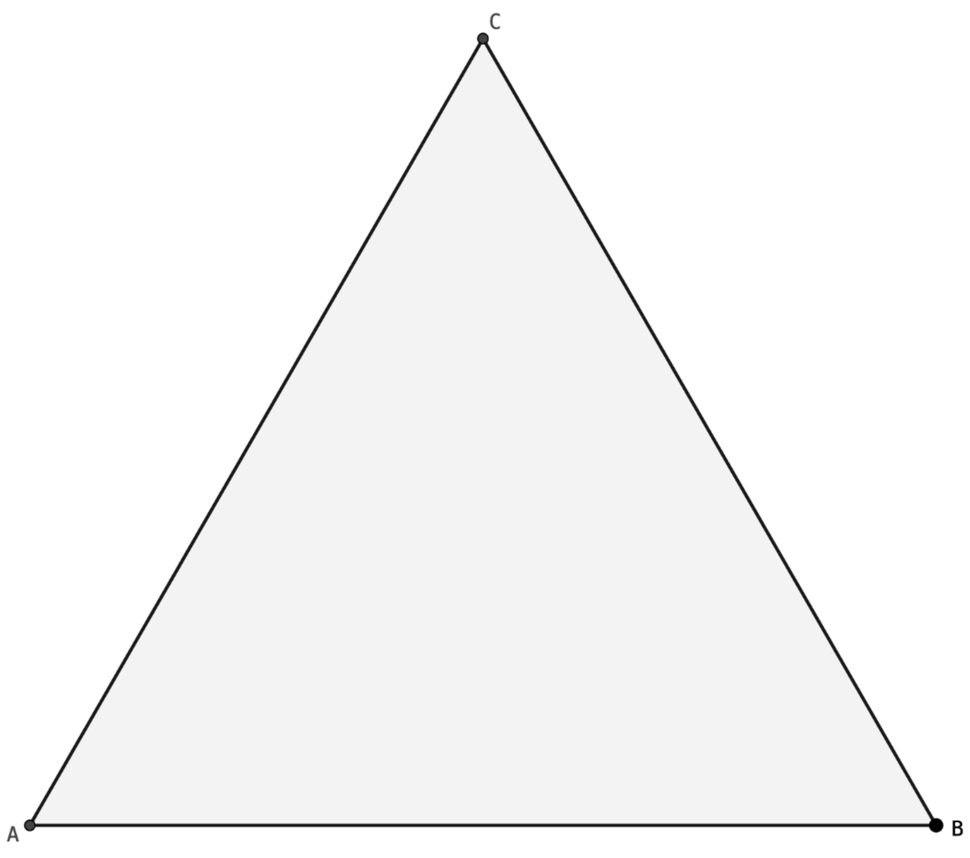
8. Ron se moque du jeu de ses amis et leur lance un défi : « *Et si le carré faisait plutôt 4 sur 4 et qu'on y plaçait les entiers de 1 à 16. Dans quel intervalle choisir l'entier A ?* »
Que vont répondre Harry et Hermione ?

Equipe : ……

Annexe 1 : Exercice 2, Partie A, question 1
Figure 1



Annexe 2 : Exercice 2, Partie B, question 1a
Figure 2



Equipe : ……

Annexe 3 : Exercice 2, Partie B, question 2c
Figure 3