Devoir pour préparer sa réussite en PCSI .

Travail vérifié le jour de la rentrée.

PCSI, Lycée Dupuy de Lôme

Il s'agit d'exercices qui sont entièrement au programme de mathématiques de terminale et de première. Il est en effet inutile de commencer le programme de classes préparatoires avant la rentrée. Par contre, il est indispensable de consolider les acquis du lycée. Ces exercices permettent principalement de s'entraîner aux techniques calculatoires SANS CALCULATRICE. Il est en effet indispensable d'avoir des bases solides en ***calcul*** *afin d'être préparé à aborder les notions du programme de classes préparatoires. Afin de mieux s'entraîner, il ne faut pas utiliser la calculatrice pour résoudre les exercices sauf exception précisée . Il est bon de commencer dès à présent à faire* ***des fiches de cours / méthodes sur les différents thèmes à réviser et les connaître*** *. On ne s'y prend pas au dernier moment , plusieurs jours de travail vont être nécessaire pour arriver confiant en CPGE. Ce devoir est non noté, il permet d'évaluer vos connaissances et votre motivation . Vous devez apprendre dès à présent à travailler* ***pour vous*** *et* ***non pour des notes .*** *Votre compréhension et votre esprit de recherche est primordiale pour la formation.*

Exercices 1 et 2 : Révision à mener sur la gestion des inconnues, la résolution d'équations et inéquations .

Exercice 1 : Équation - Inéquation.

Exercice d'entrainement.

1. Résoudre **graphiquement** puis numériquement $x^2 \leq 16$ à l'aide du graphe de la fonction $x \longmapsto x^2$ (que vous représenterez).
2. Résoudre à l'aide de la question précédente l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbf{D}$ (à préciser) ,
$$\left(\frac{3x+1}{6x-3}\right)^2 \leq 16$$
Indication : ***Rappeler les opérations autorisées dans les inégalités et les conditions de ces opérations****. Pensez aux signes des termes manipulés. Vous pouvez également penser à faire des tableaux de signes si besoin.*

Exercice de recherche.

1. On considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbf{R}$:
$$(2-x)(1-x)-6=0$$
Montrer que cette équation admet deux racines distinctes et déterminer ses racines que l'on notera r_1 et r_2 avec $r_1 > r_2$.
On pose :
$$x_0 = 2\,,\, y_0 = 1$$
$$\textbf{pour tout } n \in \mathbf{N},\, x_{n+1} = 2x_n - 3y_n\,,\, y_{n+1} = -2x_n + y_n$$
$$\textbf{pour tout } n \in \mathbf{N},\, X_n = x_n - y_n\,,\, Y_n = 2x_n + 3y_n$$
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$X_n = r_1^n \textbf{ et } Y_n = 7r_2^n$$
Indication : on écrira correctement la propriété de récurrence P_n : " ... ".
3. Exprimer pour tout $n \in \mathbf{N}$, les valeurs de x_n et y_n en fonction de X_n et de Y_n.
4. En déduire pour tout $n \in \mathbf{N}$, les valeurs de x_n et y_n en fonction de n.

Exercice 2 : Équations.

On considère l'équation (E_1) d'inconnue $x \in \mathbf{R}$:

$$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0 \qquad (E_1)$$

1. Montrer que 1 est solution de (E_1).
2. Montrer qu'il existe trois réels $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$
et déterminer leur valeur.
3. Résoudre (E_1).
4. Soit r une racine de (E_1). On pose : $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \longmapsto exp(rx)$.
Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'''(x) - 8f''(x) + 17f'(x) - 10f(x) = 0$

Exercice 3 : Révision à mener sur les puissances $(xy)^m = ...$, $x^p x^m = ...$ ... Entrainez-vous en reprenant des exercices de lycées.

Exercice 3 : Puissance.

On définit la suite :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \textbf{pour tout } n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \frac{n^2}{2n^2+1} u_n \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq u_n$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$.
Indication : on fera un raisonnement par équivalence logique et non par récurrence.
3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^n}$.
4. En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 4, 5 et 6 : Révision à mener sur les manipulations algébriques dans les égalités, identités remarquables, gestion des racines carrées, étude des signes, opérations autorisées dans les inégalités, dérivation quotient et composée, organisation de l'ordre des calculs lors de la résolution.

Exercice 4 .

Simplifier

$$E = \left(\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}} + \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}} \right)^2$$

Ind : penser à l'identité (a-b)(a+b)... le résultat final est $x + 2$

Exercice 5 : Gestion des inégalités et identités remarquables

Résoudre

$$-1 < \frac{2x}{1 + x^2} < 1$$

Indication : on traitera chacune des inégalités séparément.

Exercice 6 : Organisation des calculs

Calculer et simplifier

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2} \left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \right)'$$

Indication : on précisera l'ensemble d'existence puis on calculera la dérivée en premier puis on simplifiera chacune des expressions du produit.

Exercice 7 : Révision à mener sur les suites, monotonie, définition de la limite d'une suite, suite arithmétique, suite géométrique, méthode de la récurrence (rédaction soignée) .

Exercice 7 : Suites et récurrences.

On pose $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = (n+1)v_n$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $v_n > 0$.
2. Montrer que la suite $(v_n)_n$ est croissante.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $v_n \geq n$.
4. En déduire la limite de la suite $(v_n)_n$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $v_n = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n$.
   Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, v_n est appelé le factoriel de n, et on note , pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n$ et on convient $0! = 1$.
6. Déterminer sans calculatrice 3!, 4! et 5!.

Exercices 8 et 9 : Révision à mener sur les fonctions, ensemble de définition, ensemble de continuité, ensemble de dérivation, calcul de dérivées, calcul de limites, théorème des valeurs intermédiaires. Révision à mener sur les fonctions exponentielles et logarithmes, graphes, limites, simplification de composées.Révision à mener sur le calcul d'une intégrale, la recherche de primitive s de référence, les opérations avec les intégrales.

Exercice 8 : Fonctions

Soit a et b deux réels positifs, on définit la fonction f par :

$$f(x) = \frac{a + b\ln(x)}{x}$$

1. On suppose que $f(1) = 2$ et $f'(1) = 0$, en déduire les valeurs de a et b.
2. Déterminer le tableau des variations de la fonction f.
3. Combien l'équation $f(x) = 1$ admet-elle de solutions ?
4. Calculer $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx$.

Exercice 9 : Fonction avec le logarithme .

Nul besoin de connaissances extraordinaires ... les propriétés du logarithme tout de même ;)

Soit $p \in]0;1[$ un réel strictement positif , on note f_p (dépend de p) la fonction définie par :

$$f_p : x \longmapsto x\ln(\frac{x}{p}) + (1-x)\ln(\frac{1-x}{1-p})$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f_p.
2. Montrer que f_p est dérivable sur D et calculer $f_p'(x)$ pour tout $x \in D$.
3. Montrer que f_p' est dérivable sur D et que : $(f_p')'(x) = f_p"(x) = \frac{1}{x(1-x)}$.
4. Résoudre l'équation d'inconnue $f_p'(x) = 0$ d'inconnue $x \in D$.
5. En déduire les variations de f_p sur D puis montrer que f_p est positive ou nulle sur D. Les limites aux bornes ne sont pas demandées dans un premier temps.
6. Déterminer une équation de la tangente à la fonction f_p en $\frac{1}{2}$.

Exercice 10 et 11 : Révision à mener sur les probabilités et sur les variables aléatoires (vue en première aussi). Bien maîtriser la loi binomiale :) et refaire des exercices sur le sujet .

Exercice 10 : Probabilités

Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B. Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :
— A l'évènement " La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A " ;
— B l'évènement " La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B " ;
— V l'évènement " La personne interrogée dit la vérité ".

1. Déterminer un arbre de probabilité traduisant la situation.
2. Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
3. Sachant que la personne interrogée dit la vérité , calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.

Exercice 11 : Loi de Probabilités

Dans chacune des situations suivantes, déterminer la loi de X (tableau) .

a) On forme un mot de 5 lettres au hasard avec des lettres toutes distinctes . On note X le nombre de voyelles du mot obtenu.

b) On forme un jury de 6 personnes dans un groupe composé de 5 hommes et 4 femmes. X désigne le nombre de femmes.

c) On sort au hasard un animal d'un enclos où il y a 15 lamas, 15 dromadaires, 15 chameaux. On note X le nombre de bosses qu'il possède.