

BIEN DÉMARRER L'ANNÉE EN MPSI

Comment organiser vos révisions ?

Avant la rentrée, je vous demande de travailler les points suivants :

- Calcul (parenthésage, fractions, développement, factorisation). Équations et inéquations (produits, quotient, second degré).
- Étude de fonctions :
 - Fonctions usuelles : carré, cube, puissance n , inverse, racine carrée, exp, ln, cosinus et sinus.
 - Dérivation et étude des variations.
 - Calcul de limites.
 - Calcul de primitives et d'intégrales.
- Suites : terme général ou relation de récurrence, suites arithmétiques et géométriques, monotonie, limite (notamment de q^n).

Ce programme se base sur des notions vues en seconde puis en première et terminale spécialité mathématiques. L'option mathématiques expertes n'est pas exigée.

Cette liste est volontairement restreinte et contient uniquement les points essentiels au bon démarrage de l'année. Les exercices de ce document traitent surtout de la partie calculatoire, n'hésitez pas à reprendre plus globalement les notions associées. Pour ceux qui n'auraient plus leurs anciens cours :

- <https://mathenpoche.sesamath.net/> : exercices en ligne.
- <https://manuel.sesamath.net/> : manuels à télécharger.

Il est inutile d'essayer d'anticiper le programme de MPSI, il s'agit ici de consolider vos bases.

NB : la calculatrice n'est généralement pas autorisée aux concours en mathématiques. Il va falloir réapprendre à faire les calculs à la main. La calculatrice sera néanmoins autorisée (sans être nécessaire) pour le premier devoir surveillé de l'année.

Pour toute question, vous pouvez me contacter : cecile.lerudulier@gmail.com

Bonnes révisions !

C. Le Rudulier

Exercices d'entraînement

Ce document regroupe des exercices de révision en autonomie et n'est pas à rendre. Vous trouverez le corrigé sur la page <https://dupuydelome-lorient.fr/lettres-de-rentree>.

Exercice 1

Calcul général et identités remarquables. On s'entraîne sans calculatrice !

1. Développer

- (a) Développer et réduire $(x + 2)(-2x - 3)$.
- (b) Développer et réduire $(3x - 1)^2$.
- (c) Développer et réduire $t - (t + 2)(t - 2)$.
- (d) Développer et réduire $(a + b)^3$.

2. Factoriser

- (a) Factoriser, pour tout réel x , $3x - 5x^2$.
- (b) Factoriser, pour tout réel x , $x - 1 + 2x(x - 1)$.
- (c) Factoriser, pour tout réel x , $4x^2 - 9$.
- (d) Factoriser, pour tout réel t , $(6 - 2t)^2 - (t - 1)(3 - t)$.
- (e) Calculer, à la main, $79 \times 822 - 79 \times 812$.

3. Fractions

- (a) Calculer : $\frac{1}{3} - \frac{1}{6}$; $\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$; $\frac{3}{4} \times \frac{4}{9} \times 2$.
- (b) Calculer $\frac{2}{3}$ et $\frac{2}{5}$. *On notera que la bonne présentation des fractions est cruciale.*
- (c) Calculer $\frac{3}{4} - \frac{2}{25} \times 10$.
- (d) Réduire en un seul quotient $\frac{x - 3}{2} - \frac{1 - 2x}{4}$.
- (e) Après avoir déterminé le domaine de définition, réduire en un seul quotient $\frac{x - 3}{1 + x} - \frac{1 - 2x}{(1 + x)^2}$.

- (f) Après avoir déterminer le domaine de définition, réduire en un seul quotient $\frac{x-3}{1+x} - \frac{1-2x}{5-x}$.
- (g) Factoriser l'expression $4 - \frac{1}{(x+1)^2}$ (on attend un quotient de deux expressions factorisées), après avoir indiqué le domaine de validité d'une telle expression.

4. Puissances

- (a) Calculer 2^{4^2} et $(2^4)^2$.
- (b) Écrire $(2x)^3 \times (4x^3)^2$ sous la forme $2^a \times x^b$.
- (c) Développer $(x^2 - 3x)^2$.
- (d) Simplifier $\frac{2^{x+3}}{8 \times 2^{2x}}$.
- (e) Réduire en un seul quotient $\left(\frac{1}{x}\right)^4 + \frac{3y}{x^2}$.
- (f) Simplifier $\frac{(x^2y)^3}{x^{-1}y^4}$.

5. Racine carrée

- (a) Simplifier les expressions $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ et $\sqrt{(-5)^2}$.
- (b) Calculer $\sqrt{\sqrt{16}}$
- (c) Justifier que $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, de deux façons différentes.
- (d) De même, écrire sous une autre forme $\sqrt{45}$ et $\sqrt{20}$.

Exercice 2

Équations et inéquations du premier degré

- Résoudre $2x + 5 = 3x - 4$
- Résoudre $x = 2 - x$.
- Résoudre $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = 5$.
- Résoudre $4 - x \leq 2 + x$
- Résoudre $6x + 1 > 1 - 7x$.

- Résoudre $3 - 2x < 7 - 4x$.

Exercice 3

Équations et inéquations du second degré

- Résoudre $2x^2 - 3x - 2 = 0$.
- Résoudre $x^2 - 5x + 2 = 0$.
- Résoudre $x^2 + 6x + 9 = 0$.
- Résoudre $2x + 1 = 3x^2$.
- Résoudre $3x - x^2 - 2 > 0$.
- Résoudre $x^2 + x \geq 12$.
- Résoudre $x^2 - 4x + 4 > 0$.
- Résoudre $x^2 + x + 1 \geq 0$.

Exercice 4

Tableaux de signe (pour les inéquations, le signe des dérivées, etc.)
Dresser le tableau de signe des expressions suivantes.

- | | |
|------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $5x - 6$ | 5. $x^3 - 5x^2 + 4x$ |
| 2. $3 - x$ | 6. $\frac{3 - 2x}{6x - 3}$ |
| 3. $1 - x^2$ | 7. $\frac{e^x - x e^x}{1 - 4x^2}$ |
| 4. $(2x - 5)(x + 3)(1 - 5x)$ | |

Exercice 5

Quotients

- Résoudre $\frac{2x-1}{x+3} = \frac{1}{x+2}$.
- Résoudre $2x + 1 = \frac{1}{2x-3}$.
- Résoudre $\frac{4-x}{x-1} \leq \frac{2}{x+1}$.

Exercice 6*Exponentielle et logarithme*

1. Simplifier $\exp(3) \times \exp(-7)$.
2. Simplifier $\frac{\exp(2x)}{\exp(4x)}$.
3. Factoriser $\exp(x) - \exp(x+1)$.
4. Résoudre l'équation $\ln(2) + \ln(x) = 1$.

Exercice 7*Trigonométrie - Fonctions cosinus et sinus*

1. Trouver un réel θ tel que $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = -\frac{1}{2}$.
2. Simplifier : $1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
3. Déterminer l'ensemble des réels θ tels que $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$.
4. Déterminer l'ensemble des réels $\theta \in]-\pi, \pi]$ tels que $\sin(\theta) > -\frac{1}{2}$.
5. Déterminer l'ensemble des réels $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $\sin(\theta) > -\frac{1}{2}$.

Exercice 8*Calcul de dérivées*

Dériver les fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto x^2 + 3x - 5$
2. $f : x \mapsto 2x^3 - 7x^4$
3. $f : x \mapsto \exp(\cos(x))$
4. $f : x \mapsto \frac{x+2}{x^2-x+1}$
5. $f : x \mapsto 2x - 5 \ln(x)$

6. $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{x}$

7. $f : x \mapsto \sqrt{x} \ln(x)$.

8. $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 9*Étude de fonctions*Pour chacune des fonctions f suivantes :

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f , et calculer sa dérivée.
3. Étudier les variations de f , et calculer, si elles existent, ses limites aux bornes de son domaine de définition.

1. $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

2. $f(x) = x e^{-x}$

3. $f(x) = \sin^3(x)$ à étudier sur $[0, 2\pi]$.

Exercice 10*Calcul de primitives* Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

1. Déterminer une primitive de $f : x \mapsto x^2 + 3x - 5$ sur \mathbb{R} .

2. Déterminer une primitive de $f : x \mapsto 2x^3 - 7x^4$ sur \mathbb{R} .

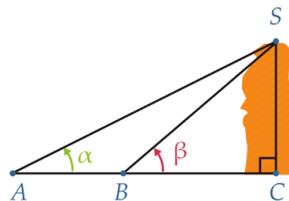
3. Déterminer une primitive de $f : x \mapsto x e^{-x^2}$ sur \mathbb{R} .

4. Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$ sur $]1, +\infty[$.

Exercice 11

Trigonométrie

Un navigateur passant devant le Cap Horn par temps calme décide de mesurer la hauteur SC de ce rocher.



Le navigateur a mesuré les angles géométriques α et β ainsi que la distance AB entre les deux points de mesure.

On donne :

- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

- $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$

- $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$

1. (a) Montrer que $SC = (AB + BC) \tan(\alpha)$.

(b) En déduire que $SC = \frac{\tan(\alpha) \tan(\beta)}{\tan(\beta) - \tan(\alpha)} AB$.

2. (a) Montrer que $\tan(\beta) - \tan(\alpha) = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)}$.

(b) En déduire que $SC = \frac{\sin(\alpha) \sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha)} AB$.

3. Calculer la hauteur du rocher avec les données suivantes : $AB = 200\text{m}$, $\alpha = 12,9^\circ$ et $\beta = 14,4^\circ$.