Bien démarrer l'année en MPSI

Éléments de correction

Exercice 1

1. (a) $(x+2)(-2x-3) = -2x^2 - 7x - 6$.
   (b) $(3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$.
   (c) $t - (t+2)(t-2) = t^2 + t - 4$.
   (d) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

2. (a) $3x - 5x^2 = x(3-5x)$.
   (b) $x - 1 + 2x(x-1) = (x-1)(1+2x)$.
   (c) $4x^2 - 9 = (2x-3)(2x+3)$.
   (d) $(6-2t)^2 - (t-1)(3-t)$.
   (e) $79 \times 822 - 79 \times 812 = 79 \times 10 = 790$.

3. (a) $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{6}$; $\dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{6} = \dfrac{13}{12}$; $\dfrac{3}{4} \times \dfrac{4}{9} \times 2 = \dfrac{2}{3}$.
   (b) $\dfrac{\frac{2}{3}}{5} = \dfrac{2}{15}$ et $\dfrac{2}{\frac{3}{5}} = \dfrac{10}{3}$.
   (c) $\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} - \dfrac{2}{25} \times 10 = \dfrac{6}{5}$.
   (d) $\dfrac{x-3}{2} - \dfrac{1-2x}{4} = \dfrac{4x-7}{4}$.
   (e) $x \mapsto \dfrac{x-3}{1+x}$ et $x \mapsto \dfrac{1-2x}{(1+x)^2}$ sont définies sur l'ensemble
   $$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 + x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$
   Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
   $$\frac{x-3}{1+x} - \frac{1-2x}{(1+x)^2} = \frac{x^2-4}{(1+x)^2}.$$
   (f) $x \mapsto \dfrac{x-3}{1+x}$ est définie sur $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 + x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
   $x \mapsto \dfrac{1-2x}{5-x}$ est définie sur $\{x \in \mathbb{R} \mid 5 - x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{5\}$.
   Donc le tout est défini pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}$. Sur cet ensemble, $\dfrac{x-3}{1+x} - \dfrac{1-2x}{5-x} = \dfrac{x^2-9x-16}{(1+x)(5-x)}$.
   (g) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $4 - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{4x^2+8x+3}{(x+1)^2}$. Il reste à factoriser le numérateur. Pour cela on cherche ses racines (voir cours sur la factorisation des trinômes du second degré) qui sont ici $-\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. Ainsi,
   $$4 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{4(x+\frac{3}{2})(x+\frac{1}{2})}{(x+1)^2}$$

4. (a) $2^{4^2} = 2^{16} = 65536$ et $(2^4)^2 = 2^8 = 256$.
   (b) $(2x)^3 \times (4x^3)^2 = 2^7x^9$.
   (c) $(x^2-3x)^2 = x^4 - 6x^3 - 9x^2$.
   (d) $\dfrac{2^{x+3}}{8 \times 2^{2x}} = 2^{-x}$.
   (e) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^4 + \dfrac{3y}{x^2} = \dfrac{1+3yx^2}{x^4}$.
   (f) $\dfrac{(x^2y)^3}{x^{-1}y^4} = \dfrac{x^7}{y}$.

5. (a) $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = 4$ et $\sqrt{(-5)^2} = 5$.
   (b) $\sqrt{\sqrt{16}} = 2$
   (c) • $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.
   • $(4\sqrt{2})^2 = 4^2 \times \sqrt{2}^2 = 16 \times 2 = 32$ et $4\sqrt{2} > 0$ donc $4\sqrt{2} = \sqrt{32}$.
   (d) $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ et $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Exercice 2

1. $2x+5=3x-4 \Leftrightarrow x=9$. L'ensemble des solutions est $\{9\}$.
2. $x=2-x \Leftrightarrow x=1$. L'ensemble des solutions est $\{1\}$.
3. $\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}=5 \Leftrightarrow x=6$. L'ensemble des solutions est $\{6\}$.
4. $4-x \leqslant 2+x \Leftrightarrow x \geqslant 1$. L'ensemble des solutions est $[1,+\infty[$.
5. $6x+1>1-7x \Leftrightarrow x>0$. L'ensemble des solutions est $]0,+\infty[$.
6. $3-2x<7-4x \Leftrightarrow x<2$. L'ensemble des solutions est $]-\infty,2[$.

Exercice 3

1. $2x^2-3x-2=0$. L'ensemble des solutions est $\{-\frac{1}{2},2\}$.
2. $x^2-5x+2=0$. L'ensemble des solutions est $\{\frac{5-\sqrt{17}}{2},\frac{5+\sqrt{17}}{2}\}$.
3. $x^2+6x+9=0$. L'ensemble des solutions est $\{-3\}$.
4. $2x+1=3x^2$. L'ensemble des solutions est $\{1,-\frac{1}{3}\}$.
5. $3x-x^2-2>0$. On dresse d'abord le tableau de signe du trinôme (après avoir déterminer ses racines) : $x_1=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$, $x_2=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$-x^2+3x-2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions est $\left]\dfrac{3-\sqrt{17}}{2},\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right[$.

6. $x^2+x \geqslant 12$. Les solutions de $x^2+x-12=0$ sont -4 et 3.

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
x^2+x-12		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est $]-\infty,-4]\cup[3,+\infty[$.

7. $x^2-4x+4>0$. $x^2-4x+4=0$ a une seule solution, 2.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
x^2-4x+4		$+$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

8. $x^2+x+1 \geqslant 0$. $\Delta<0$, l'équation $x^2+x+1=0$ n'a pas de solution (attention ! ce n'est pas le cas de l'inéquation étudiée !). Pour tout réel x, $x^2+x+1>0$ (signe du coefficient dominant). Donc $x^2+x+1\geqslant 0$ est toujours vrai. L'ensemble des solutions de $x^2+x+1\geqslant 0$ est $\mathbb{R}$.

Exercice 4

1.

x	$-\infty$		$\frac{6}{5}$		$+\infty$
$5x-6$		$-$	0	$+$	

2.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	0	$-$	

3.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4.

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{5}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$1-5x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$(2x-5)(x+3)(1-5x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

5. $x^3 - 5x^2 + 4x = x(x^2 - 5x + 4)$.
On résout $x^2 - 5x + 4 = 0$. $\Delta = 9 > 0$, les solutions sont 1 et 4.

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x^2 - 5x + 4$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x(x^2 - 5x + 4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

6. Domaine de définition : la fonction $x \mapsto \dfrac{3-2x}{6x-3}$ est définie sur l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid 6x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$3 - 2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$6x - 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{3-2x}{6x-3}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

7. Domaine de définition : $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction quotient $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x}{1-4x^2}$ est définie sur $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 - 4x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$.
On factorise : $\dfrac{\mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x}{1-4x^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x)}{1-4x^2}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
e^x		$+$		$+$		$+$		$+$	
$1 - x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$1 - 4x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{\mathrm{e}^x(1-x)}{1-4x^2}$		$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

Exercice 5

1. $\dfrac{2x-1}{x+3} = \dfrac{1}{x+2}$.
Domaine de définition : les quotients de l'équations sont définis lorsque $x + 3 \neq 0$ et $x + 2 \neq 0$ donc pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$.
Soit donc $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$.
$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{x+3} = \frac{1}{x+2} &\iff (2x-1)(x+2) = x+3 \\ &\iff 2x^2 + 2x - 5 = 0 \end{aligned}$$
On tombe sur une équation du second degré. $\Delta = 44$, $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{11}$.
L'ensemble des solutions est $\{\frac{-1-\sqrt{11}}{2}, \frac{-1+\sqrt{11}}{2}\}$.

2. $2x + 1 = \dfrac{1}{2x-3}$.
Domaine de définition : $x \mapsto 2x + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ (fonction affine) et $x \mapsto \dfrac{1}{2x-3}$ l'est sur $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$.
Soit donc $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$.
$$\begin{aligned} 2x + 1 = \frac{1}{2x-3} &\iff (2x+1)(2x-3) = 1 \\ &\iff 4x^2 - 4x - 4 = 0 \end{aligned}$$
On tombe sur une équation du second degré. $\Delta = 4^2 \times 5$ donc $\sqrt{\Delta} = 4\sqrt{5}$.
L'ensemble des solutions est $\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$.

3. $\dfrac{4-x}{x-1} \leqslant \dfrac{2}{x+1}$.
Domaine de définition : les quotients de l'équations sont définis lorsque $x - 1 \neq 0$ et $x + 1 \neq 0$ donc pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
Soit donc $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. **Attention ! Pas de produit en croix pour une inéquation**.
$$\begin{aligned} \frac{4-x}{x-1} \leqslant \frac{2}{x+1} &\iff \frac{4-x}{x-1} - \frac{2}{x+1} \leqslant 0 \\ &\iff \frac{-x^2 + x + 6}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0 \end{aligned}$$

Résolvons $-x^2+x+6=0$: $\Delta = 25$, il y a deux solutions, -2 et 3.
$(x-1)(x+1) = x^2-1$ et a pour racines -1 et 1.
On fait un tableau de signe.

x	$-\infty$		-2		-1		1		3		$+\infty$
$-x^2+x+6$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2-1		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-x^2+x+6}{x^2-1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions est $]-\infty,-2]\cup]-1,1[\cup 3,+\infty[$.

Exercice 6

1. $\exp(3)\times\exp(-7) = \mathrm{e}^{-4}$.
2. $\dfrac{\exp(2x)}{\exp(4x)} = \mathrm{e}^{-2x}$.
3. $\exp(x)-\exp(x+1) = \mathrm{e}^{x}(1-\mathrm{e})$.
4. Soit $x>0$.

$$\begin{aligned}\ln(2)+\ln(x)=1 &\iff \ln(2x)=1\\ &\iff 2x=\mathrm{e}^1\\ &\iff x=\frac{\mathrm{e}}{2}\end{aligned}$$

Exercice 7

1. $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$ ou $\theta = \dfrac{11\pi}{6}$.
2. $1+\left(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = \dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.
3. $\cos(\theta)=\dfrac{1}{2} \leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$ (modulo 2π) ou $\theta=-\frac{\pi}{3}$ (modulo 2π).
   L'ensemble des solutions est donc
   $$\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$
4. On peut ici se contenter de visualiser graphiquement le résultat sur un cercle trigonométrique. L'ensemble des solutions est $]-\pi,-\frac{5\pi}{6}[\cup]-\frac{\pi}{6},\pi]$.
5. L'ensemble des solutions est $[0,\frac{7\pi}{6}[\cup]\frac{11\pi}{6},2\pi[$.

Exercice 8

1. $f'(x)=2x+3$.
2. $f'(x)=6x^2-28x^3$
3. $f'(x)=-\sin(x)\exp(\cos(x))$
4. $f'(x)=\dfrac{-x^2-4x+3}{(x^2-x+1)^2}$
5. $f'(x)=2-\dfrac{5}{x}$
6. $f'(x)=\dfrac{2x^2-(1+x^2)\ln(1+x^2)}{x^2(1+x^2)}$
7. $f'(x)=\dfrac{\ln(x)+2}{2\sqrt{x}}$
8. $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 9

1. $f(x)=\ln(1+\mathrm{e}^x)$.
   - $x\mapsto \mathrm{e}^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $x\mapsto\ln(x)$ l'est sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc $f(x)$ existe si et seulement si $1+\mathrm{e}^x>0$, ce qui est toujours vrai (car $\mathrm{e}^x>0$). Ainis, f est définie sur $\mathbb{R}$.
   - Par le même raisonnement, elle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - Pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}>0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{X\to 1} \ln(X) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$

- $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ et $x \mapsto x$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc par produit, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
  Et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0^+$ donc par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
- Pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$. Puisque $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $1-x$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

3. $f(x) = \sin^3(x)$ à étudier sur $[0, 2\pi]$.

- f est définie et dérivable sur $[0, 2\pi]$.
- Pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $f'(x) = 3\cos(x)\sin^2(x)$.

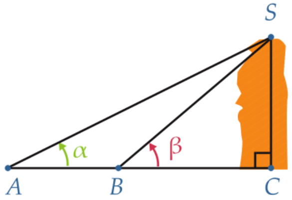
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\sin^2(x)$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$	0
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Exercice 10

On notera F une primitive de f.

1. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{2}x^2 - 5x$.
2. $F(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{7}{5}x^5$
3. $F(x) = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}$
4. $F(x) = \ln(x-1) - \dfrac{1}{x-1}$.

Exercice 11



1. (a) $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{SC}{AC}$
donc $SC = AC\tan(\alpha) = (AB + BC)\tan(\alpha)$.

   (b) On a de même $\tan(\beta) = \dfrac{SC}{BC}$ donc $BC = \dfrac{SC}{\tan(\beta)}$. On insère ceci dans l'égalité trouvée en 1a :

$$\begin{aligned} SC &= AB\tan(\alpha) + \frac{SC}{\tan(\beta)}\tan(\alpha) \\ \text{donc}\quad SC\left(1 - \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\beta)}\right) &= AB\tan(\alpha) \\ \text{donc}\quad SC &= AB\tan(\alpha) \times \frac{1}{\left(1 - \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\beta)}\right)} \\ \text{donc}\quad SC &= \frac{\tan(\alpha)\tan(\beta)}{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}AB \end{aligned}$$

2. (a) On utilise la formule donnée pour $\sin(a+b)$ avec $a = \beta$ et $b = -\alpha$, sachant que $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} &= \frac{\sin(\beta)\cos(-\alpha) + \cos(\beta)\sin(-\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} \\ &= \frac{\sin(\beta)\cos(\alpha) - \cos(\beta)\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} \\ &= \frac{\sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} - \frac{\cos(\beta)\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} \\ &= \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} - \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \\ &= \tan(\beta) - \tan(\alpha) \end{aligned}$$

   (b) On remplace ceci dans l'expression de SC :

$$\begin{aligned} SC &= \frac{\tan(\alpha)\tan(\beta)}{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}AB \\ &= \frac{\tan(\alpha)\tan(\beta)}{\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}AB \\ &= \frac{\tan(\alpha)\tan(\beta)\cos(\alpha)\cos(\beta)}{\sin(\beta - \alpha)}AB \\ &= \frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha)}AB \end{aligned}$$

3. Application numérique (à la calculatrice ici) : $SC \approx 424\text{m}$