DEVOIR D'ÉTÉ DE MATHÉMATIQUES

à rendre le jeudi 1er septembre

- Le calcul occupe une place centrale en prépa.
  Afin de vous préparer au mieux à votre rentrée, **il vous est demandé de faire ce devoir au propre et avec soin**.
- Vous ferez le nécessaire pour pallier les problèmes que vous pourriez rencontrer.
  Vous ne devez pas utiliser votre calculatrice : vous n'en avez pas besoin !
  Il vous appartient de retenir les notions du cours que vous utiliserez : si vous rencontrez des difficultés sur un point, vous devez prendre l'initiative de vous mettre à niveau.
- En cas de besoin, vous pouvez demander des indications en envoyant un e-mail à : `psoleillant@yahoo.fr`

1 Etudes de fonctions et manipulations d'inégalités

1. Résoudre l'inéquation $\mathcal{I} : \dfrac{1}{2x-1} \leqslant 1$, d'inconnue réelle x.
On commencera par indiquer domaine sur lequel cette inéquation est correctement définie.

2. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{2} - x$.
  (a) Etudier les variations de f.
  (b) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
  (c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.
  (d) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f au point d'abscisse 1.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$.
  (a) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.
  (b) Montrer que la fonction φ définie par $\varphi(x) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.
  (c) Etant donné $x \in \mathbb{R}$, écrire l'expression $g(x) - 1$ sous la forme d'une fraction.
  En déduire une primitive de g sur $\mathbb{R}$, puis calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(3)} g(t)\,dt$.
  On simplifiera au maximum la valeur de l'intégrale.

4. Soit h la fonction définie par $h(x) = \sin\left(\sqrt{x+1}\right) + \ln\left(9-x^2\right)$.
  (a) Déterminer le domaine de définition de h.
  (b) Calculer, en tout réel x où c'est possible, $h'(x)$.

5. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^n \ln(t)\,dt$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Une étude de suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 2$, si bien que la relation ci-dessus se réécrit : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) Etudier les variations de f, puis montrer que, pour tout $x \in [1,2]$, $1 \leqslant f(x) \leqslant 2$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. (a) Etudier le signe de l'expression $x^2 - 3x + 2$, selon la valeur du réel x.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3}{2}$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_{n+1} - 1 \leqslant \dfrac{u_n - 1}{2}$.
   (c) Déduire de ce qui précède que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   (d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.