Devoir pour préparer sa réussite en PCSI .

A rendre le jour de la rentrée.

PCSI, Lycée Dupuy de Lôme

Il s'agit d'exercices qui sont entièrement au programme de mathématiques de terminale (voire de première). Il est en effet inutile de commencer le programme de classes préparatoires avant la rentrée. Par contre, il est indispensable de consolider les acquis du lycée. Ces exercices permettent principalement de s'entraîner aux techniques calculatoires. Il est en effet indispensable d'avoir des bases solides en calcul afin d'être préparé à aborder les notions du programme de classes préparatoires. Afin de mieux s'entraîner, il ne faut pas utiliser la calculatrice pour résoudre les exercices sauf exception précisée . Il est bon de commencer dès à présent à faire ***des fiches de cours / méthodes sur les différents thèmes à réviser et les connaître*** *! On ne s'y prend pas au dernier moment , plusieurs jours de travail vont être nécessaire pour arriver confiant en CPGE. Une copie par exercice à présenter le jour de la rentrée et les questions BONUS sont libres de recherche ;) .*

Exercices 1 et 2 : Révision à mener sur la gestion des inconnues, la résolution d'équations et inéquations .

Exercice 1 : Équation - Inéquation.

Exercice d'entrainement. Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbf{R}$,

$$(\frac{3x+1}{6x-3})^2 \leq 16$$

Exercice de recherche. 1. Soient $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ tels que $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

On considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbf{R}$:

$$(a-x)(d-x) - bc = 0$$

(a) Donner une condition sur a, b, c, d pour que cette équation admette deux racines réelles distinctes .

(b) On considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbf{R}$:

$$(2-x)(1-x) - 6 = 0$$

Montrer que cette équation admet deux racines distinctes et déterminer ses racines que l'on notera r_1 et r_2 avec $r_1 > r_2$.

On pose :

$$x_0 = 2 \, , \, y_0 = 1$$

$$\textbf{pour tout } n \in \mathbf{N}, \, x_{n+1} = 2x_n - 3y_n \, , \, y_{n+1} = -2x_n + y_n$$

$$\textbf{pour tout } n \in \mathbf{N}, \, X_{n+1} = x_n - y_n \, , \, Y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$$

(c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$X_n = r_1^n \textbf{ et } Y_n = 7r_2^n$$

(d) En déduire pour tout $n \in \mathbf{N}$, les valeurs de x_n et y_n en fonction de n.

Exercice 2 : Équations.

On considère l'équation (E_1) d'inconnue $x \in \mathbf{R}$:

$$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0 \qquad (E_1)$$

1. Montrer que 1 est solution de (E_1).
2. Montrer qu'il existe trois réels $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

   et déterminer leur valeur.
3. Résoudre (E_1).
4. Soit r une racine de (E_1). On pose : $f : \mathbb{R} \to \mathbf{R} : x \longmapsto exp(rx)$.
   Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'''(x) - 8f''(x) + 17f'(x) - 10f(x) = 0$

Exercice 3 : Révision à mener sur les puissances $(xy)^m = ...$, $x^p x^m = ...$ ... Entrainez-vous en reprenant des exercices de secondes.

Exercice 3 : Puissance.

On définit la suite :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \textbf{pour tout } n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \frac{n^2}{2n^2+1} u_n \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^n}$.
3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 4 : Révision à mener sur les manipulations algébriques dans les inégalités, étude des signes, opérations autorisées dans les inégalités, la valeur absolue, factorisation canonique des polynômes de degré 2 .

Exercice 4 : Équations/Inéquations.

Soit u la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $u(x) = x^2 + x + 1$.

1. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} u(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} u(x)$.
2. *On rappelle que si $a \in \mathbf{R}^*$ et $b, c \in \mathbf{R}$, alors pour tout réel x, on a :*

$$ax^2 + bx + c = a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2})$$

   Cette écriture appelée forme canonique. En utilisant la forme canonique, montrer que pour tout réel x, $u(x) \geq \frac{3}{4}$.
3. *On rappelle que si $a \in \mathbf{R}$, $\sqrt{a^2} = |a|$.*
   Montrer que pour tout réel x, $\sqrt{u(x)} > |x + \frac{1}{2}|$.

Exercice 5 : Révision à mener sur les suites, monotonie, définition de la limite d'une suite, suite arithmétique, suite géométrique, méthode de la récurrence (rédaction soignée) . Révision à mener sur le calcul d'intégrale, notion de primitives, primitives usuelles, propriétés de l'intégrale.

<u>Exercice 5 : Suites et récurrences.</u>

1. On pose $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = (n+1)v_n$.
   (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $v_n > 0$.
   (b) Montrer que la suite $(v_n)_n$ est croissante.
   (c) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $v_n \geq n$.
   (d) En déduire la limite de la suite $(v_n)_n$.
   (e) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $v_n = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n$.
   Pour tout $n \in \mathbf{N}$, v_n est appelé le factoriel de n, et on note , pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n$
   (f) Déterminer sans calculatrice 3!, 4! et 5!.
2. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \longmapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ (avec la convention $0^0 = 1$) et $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.
   (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, exprimer $f_n^{'}$ en fonction de f_n et f_{n-1}.
   (b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $\int_0^1 f_n'(x)\,dx$.
   (c) Calculer u_0.
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = u_{n-1} - \frac{1}{en!}$.
   (e) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante .
   (f) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq 0$.
   (g) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.
   (h) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq \frac{1}{n!}$.
   (i) En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.

Exercices 6 et 7 : Révision à mener sur les fonctions, ensemble de définition, ensemble de continuité, ensemble de dérivation, calcul de dérivées, calcul de limites, théorème des valeurs intermédiaires. Révision à mener sur les fonctions exponentielles et logarithmes, graphes, limites, simplification de composées.

<u>Exercice 6 : Fonctions</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}$$

1. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$.
2. Déterminer la dérivée de la fonction f .
3. En déduire la monotonie de la fonction f.
4. Déterminer
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - 3 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) - 3$$
   Que pouvez vous conclure sur la droite Δ d'équation $y = 3$?
5. Montrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur $\mathbf{R}$. Déterminer une approximation de α à 10^{-2} près à l'aide de la calculatrice.
   Soit h la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.
   On désigne par H la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par
$$H(x) = -\frac{3}{2}\ln(1 + e^{-2x})$$

6. Montrer que H est une primitive de h sur $\mathbf{R}$.
7. Calculer $\int_0^{\ln(2)} h(x)\,dx$. On donnera une expression simplifiée.

Exercice 7 : Fonctions à paramètre. BONUS

Nul besoin de connaissances extraordinaires, p désigne un nombre réel quelconque fixé.

Soit $p \in]0;1[$, on note f_p la fonction définie par : $x \longmapsto x\ln(\frac{x}{p}) + (1-x)\ln(\frac{1-x}{1-p})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f_p.
2. Montrer que f_p est dérivable sur D et calculer $f_p'(x)$ pour tout $x \in D$.
3. Montrer que f_p' est dérivable sur D et que : $(f_p')'(x) = f_p"(x) = \frac{1}{x(1-x)}$.
4. Résoudre l'équation d'inconnue $f_p'(x) = 0$ d'inconnue $x \in D$.
5. En déduire les variations de f_p sur D puis montrer que f_p est positive ou nulle sur D. Les limites aux bornes ne sont pas demandées dans un premier temps.
6. Déterminer une équation de la tangente à la fonction logarithme en 1.
7. Montrer, en étudiant la fonction $x \longmapsto \ln(x) - x$, que pour tout $x > 0$,

$$\ln(x) \leq (x-1)$$

Interprétation graphique ?

Exercice 8 et 9 : Révision à mener sur les probabilités et sur les variables aléatoires (vue en première aussi). Bien maîtriser la loi binomiale :) et refaire des exercices sur le sujet .

Exercice 8 : Probabilités

Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B. Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :
— A l'évènement " La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A " ;
— B l'évènement " La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B " ;
— V l'évènement " La personne interrogée dit la vérité ".

1. Déterminer un arbre de probabilité traduisant la situation.
2. Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
3. Sachant que la personne interrogée dit la vérité , calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.

Exercice 9 : Loi de Probabilités

Dans chacune des situations suivantes, déterminer la loi de X (tableau) .

a) On forme un mot de 5 lettres au hasard avec des lettres toutes distinctes . On note X le nombre de voyelles du mot obtenu.

b) On range 20 objets dans 3 tiroirs. On note X le nombre d'objets dans le premier tiroir

c) On sort au hasard un animal d'un enclos où il y a 15 lamas, 15 dromadaires, 15 chameaux. On note X le nombre de bosses qu'il possède.

d) On forme un jury de 6 personnes dans un groupe composé de 5 hommes et 4 femmes. X désigne le nombre de femmes.