Devoir pour préparer la rentrée .

A rendre le 31 Aout 2020.

PCSI, Lycée Dupuy de Lôme

Il s'agit d'exercices qui sont entièrement au programme de mathématiques de terminale (voire de première). Il est en effet inutile de commencer le programme de classes préparatoires avant la rentrée. Par contre, il est indispensable de consolider les acquis du lycée. Ces exercices permettent principalement de s'entraîner aux techniques calculatoires. Il est en effet indispensable d'avoir des bases solides en calcul afin d'être préparé à aborder les notions du programme de classes préparatoires. Afin de mieux s'entraîner, il ne faut pas utiliser la calculatrice pour résoudre les exercices sauf exception précisée . Il est bon de commencer dès à présent à faire des fiches de cours / méthodes sur les différents thèmes à réviser et les connaître ! On ne s'y prend pas au dernier moment , plusieurs jours de travail vont être nécessaire pour espérer arriver confiant en CPGE. Une copie par exercice et fiche de cours/méthodes correspondante à chaque exercice à présenter le jour de la rentrée .

Exercices 1 et 2 : Révision à mener sur le cercle trigonométrique (placement d'un point, coordonnées), les fonctions sinus et cosinus (graphe, dérivation...), module et argument d'un nombre complexe, forme exponentielle, formules d'Euler, placement sur le cercle, somme géométrique .

Exercice 1 : Complexes.

1. Formule d'Euler ...
   (a) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbf{R}$,
   $$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ \textbf{et} } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$
   (b) En déduire que pour tout $\theta \in \mathbf{R}$,
   $$e^{i\theta} - 1 = 2ie^{i\frac{\theta}{2}}\sin(\frac{\theta}{2})$$
   (c) Montrer que le nombre $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$ est un imaginaire pur pour tout $\theta \in \mathbf{R}$.
2. Somme géométrique ...
   (a) Compléter :
   $$(*)\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} & q \neq 1 \\ & q = 1 \end{cases}$$
   (b) Soient $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. On suppose que x n'est pas un multiple entier de π et on pose :
   $$S = \sum_{k=0}^{n} e^{2ikx} = 1 + e^{2ix} + e^{4ix} + e^{6ix} + \cdots + e^{2i(n-1)x} + e^{2inx}$$
   Simplifier S grâce à $(*)$.

(c) Montrer que $S = e^{inx}\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$.

(d) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(2kx) = 1+\cos(2x)+\cos(4x)+\cos(6x)+\cdots+\cos(2(n-1)x)+\cos(2nx) = \frac{\cos(nx)\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$$

Exercice 2 : Complexes.

1. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0$$

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$a = 4 + 4i\sqrt{3}\,,\ b = 4 - 4i\sqrt{3},\ ,\ c = 8i$$

(a) Calculer le module et un argument du nombre a.

(b) Donner la forme exponentielle des nombres a et b.

(c) Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 3 : Révision à mener sur les manipulations algébriques dans les inégalités, étude des signes, opérations autorisées dans les inégalités, la valeur absolue, factorisation canonique des polynômes de degré 2 .

Exercice 3 : Équations/Inéquations.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $u(x) = x^2 + x + 1$.

(a) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} u(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} u(x)$.

(b) *On rappelle que si $a \in \mathbf{R}^*$ et $b, c \in \mathbf{R}$, alors pour tout réel x, on a :*

$$ax^2 + bx + c = a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2})$$

Cette écriture appelée forme algébrique.

(c) En utilisant la forme canonique, montrer que pour tout réel x, $u(x) \geq \frac{3}{4}$.

(d) *On rappelle que si $a \in \mathbf{R}$, $\sqrt{a^2} = |a|$.*
Montrer que pour tout réel x, $\sqrt{u(x)} > |x + \frac{1}{2}|$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

(a) Justifier que l'ensemble de définition est $\mathbf{R}$.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) < 1$.

(c) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1} > 0$.
Indication : on pourra traiter les cas $x \leq -\frac{1}{2}$ et $x < -\frac{1}{2}$ et utiliser la question 1.

Exercice 4 : Révision à mener sur les suites, monotonie, définition de la limite d'une suite, suite arithmétique, suite géométrique, méthode de la récurrence (rédaction soignée) . Révision à mener sur le calcul d'intégrale, notion de primitives, primitives usuelles, propriétés de l'intégrale.

<u>Exercice 4 : Suites et récurrences.</u>

1. On pose $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = (n+1)vn$.
   (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $v_n > 0$.
   (b) Montrer que la suite $(v_n)_n$ est croissante.
   (c) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $v_n \geq n$.
   (d) En déduire la limite de la suite $(v_n)_n$.
   (e) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $v_n = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n$.
   Pour tout $n \in \mathbf{N}$, v_n est appelé le factoriel de n, et on note , pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n$
   (f) Déterminer sans calculatrice 3!, 4! et 5!.

   On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \longmapsto \frac{x^n e^x}{n!}$ (avec la convention $0^0 = 1$) et $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.
   (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, exprimer $f_n^{'}$ en fonction de f_n et f_{n-1}.
   (b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $\int_0^1 f_n'(x), dx$.
   (c) Calculer u_0.
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = u_{n-1} - \frac{1}{en!}$.
   (e) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante .
   (f) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq 0$.
   (g) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.
   (h) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq \frac{1}{n!}$.
   (i) En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.

Exercices 5 et 6 : Révision à mener sur les fonctions, ensemble de définition, ensemble de continuité, ensemble de dérivation, calcul de dérivées, calcul de limites, théorème des valeurs intermédiaires. Révision à mener sur les fonctions exponentielles et logarithmes, graphes, limites, simplification de composées.

<u>Exercice 5 : Fonctions</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}$$

1. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$.
2. Déterminer la dérivée de la fonction f .
3. En déduire la monotonie de la fonction f.
4. Déterminer
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - 3 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) - 3$$
   Que pouvez vous conclure sur la droite Δ d'équation $y = 3$?
5. Montrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur $\mathbf{R}$. Déterminer une approximation de α à 10^{-2} près à l'aide de la calculatrice.

Soit h la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.
On désigne par H la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$H(x) = -\frac{3}{2}\ln(1 + e^{-2x})$$

1. Montrer que H est une primitive de h sur $\mathbf{R}$.
2. Calculer $\int_0^{\ln(2)} h(x)\,dx$. On donnera une expression simplifiée.

Exercice 6 : Fonctions à paramètre.

Soit $p \in]0;1[$, on note f_p la fonction définie par : $x \longmapsto x\ln(\frac{x}{p}) + (1-x)\ln(\frac{1-x}{1-p})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f_p.
2. Montrer que f est dérivable sur D et calculer $f_p'(x)$ pour tout $x \in D$.
3. Montrer que f' est dérivable sur D et que : $(f')'(x) = f"(x) = \frac{1}{x(1-x)}$.
4. Résoudre l'équation d'inconnue $f'(x) = 0$ d'inconnue $x \in D$.
5. En déduire les variations de f sur D puis montrer que f est positive ou nulle sur D. Les limites aux bornes ne sont pas demandées dans un premier temps.

1. Déterminer une équation de la tangente à la fonction logarithme en 1.
2. Montrer, en étudiant la fonction $x \longmapsto \ln(x) - x$, que pour tout $x > 0$,

$$\ln(x) \leq (x-1)$$

   Interprétation graphique ?
3. En déduire que, pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq 2(\sqrt{x} - 1)$.
4. En déduire que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$.
5. En déduire les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 7 : Révision à mener sur les probabilités et sur les variables aléatoires (vue en première aussi).

Problème C : Probabilités

Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B. Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :
— A l'évènement " La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A " ;
— B l'évènement " La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B " ;
— V l'évènement " La personne interrogée dit la vérité ".

1. Déterminer un arbre de probabilité traduisant la situation.
2. Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
3. Sachant que la personne interrogée dit la vérité , calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.